

73114 Johdatus Funktionaalianalyysiin

I Välikoe 11.3.2005

Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskimia

Tehtävä 1. Määrittele seuraavat käsitteet metrisessä avaruudessa.

- (a) Avoin joukko.
- (b) Kasautumispiste.
- (c) Sulkeuma.
- (d) Tiheys.
- (e) Cauchy-jono.
- (f) Täydellisyys.

Tehtävä 2. Olkoon $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-jonoja normiavaruudessa X . Osoita ε -tekniikalla, että $(\alpha x_n + \beta y_n)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono jokaisella $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Tehtävä 3. Olkoon X ja Y normiavaruuksia ja $T : X \rightarrow Y$ lineaarinen operaattori (tässä siis $\mathcal{D}(T) = X$).

- (a) Määrittele käsitteet “ T on jatkuva” ja “ T on rajoitettu”.
- (b) Osoita, että T on jatkuva $\iff T$ on rajoitettu.

Tehtävä 4. Olkoon X normiavaruus.

- (a) Määrittele aliavaruus.
- (b) Olkoon $S \subset X$ aliavaruus. Osoita, että jos S on avoin niin $S = X$.
Vihje: $0 \in S$.