73112 Matemaattinen Optimointiteoria I
Tentti 06.05.2004

Tentissä ei saa käyttää kirjallista materiaalia. Laskin ja tenttipaperin mukana jaettava kaavakokoelma sallitaan.

1. Tarkastelemme LP-probleemaa

$$\begin{array}{ll} \min & \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\ \text{ehdoilla} & \begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{array}$$

Valitsemme kantaan muuttujat $\{x_5, x_6, x_7\}$. Onko kanta käypä? Onko se duaalikäypä? Onko se optimikanta? Perustelut mukaan!!

2. Olkoot $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ja $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \geq \mathbf{0}$ sekä

$$\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \quad \text{ja} \quad \Omega_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} \leq \mathbf{b} + \mathbf{v},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Olkoon z_j, $j = 1, 2$ lineaarisen optimointitehtävän

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{ehdolla} & \mathbf{x} \in \Omega_j \end{array}$$

optimiarvo. Osoita, että $z_1 \geq z_2$.

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksi funktio ja $\alpha \in \mathbb{R}$. Osoita, että joukko $A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$ on konveksi.

4. Kirjoita probleeman

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 \\ \text{ehdoilla} & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 2, \\ & (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \geq 2, \end{array}$$

Kuhn–Tucker ehdot.

Etsi ne probleeman Kuhn–Tucker pisteet, jossa ensimmäinen rajoitusehto on epäaktiivi. Onko probleemalla sellaisia KT–pisteitä, joissa molemmat ehdot ovat epäaktiivisia?