MAT-10350, Insinöörimatematiikka X 5

Tentti, 10.9.2007, Huikkola

Tentissä ei saa olla laskinta, taulukkokirjaa, muistiinpanoja eikä kirjallisuutta. Erikseen jaettava kaavakokoelma on sallittu. Menköön tenttisi hyvin!

Tehtävä 1 Laske (piirräthän kuvan integroimisalueesta)

$$\int\int_R (xy - y^2)\,dxdy$$

kun R on suorien $x = -1, x = y, y = 0$ ja $y = 1$ rajoittama joukko.

Tehtävä 2 Laske

$$\int\int_A \sqrt{x^2 + y^2}\,da$$

kun A on ympyrän $x^2 + y^2 = 9$ sisällä oleva tasoalue. Polaarikoordinaatit...

Tehtävä 3 a) Kerro taso- ja avaruusintegraalien käytöstä tekniikassa (fysiikan/mekaniikan esimerkit käyvät). Anna jokin esimerkki.
b) Kerro differentiaaliyhtälöiden käytöstä tekniikan ongelmien (esimerkkejä löydät esim. fysiikasta, mekaniikasta, sähköteoriasta jne.) mallintamisessa.

Jokainen ajatteleva ihminen pystyy vastaamaan yo. kysymyksiin, vaikka ei olisikaan lukenut ulkoa mitään esimerkkejä. Kerro ensin asioista yleisemmin ja kerro sitten jotain yksityiskohtaisempaa. Kaavakokoelmakin saattaa tarjota joitain vihjeitä.

Tehtävä 4 a) Ratkaise DY

$$y''(x) - y(x) = 0.$$

b) Ratkaise DY

$$y'' - y = e^x.$$

c) Nimeä mahdollisimman tarkasti kohtien a) ja b) DY:t (kertaluku, lineaarisuus/epälineaarisuus jne..)

Tehtävä 5 Etsi ryhmän

$$x'(t) = 2x(t) - y(t)$$

$$y'(t) = 3x(t) - 2y(t)$$

yleinen ratkaisu ja ratkaisu, joka toteuttaa alkuehdot

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 1$$

MAT-1035X Insinöörimatematiikka 5 / vihjeitä

1. $$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dxdy = \iint_{R_{uv}} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

2. $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$$

3. $$m = \iint_R \rho(x,y)\,da, \qquad J = \iint_R d(x,y)^2 \rho(x,y)\,da$$
$$x_0 = \frac{1}{m}\iint_R x\,\rho(x,y)\,da, \quad y_0 = \frac{1}{m}\iint_R y\,\rho(x,y)\,da$$

4. $$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2\sin\phi$$

5. $$\frac{dy}{dx} + a(x)\,y = f(x); \quad y = e^{-A(x)}\left(\int f(x)e^{A(x)}dx + C\right), \quad A'(x) = a(x)$$

6. $$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$
$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

7. $$a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\sin(\omega t + \phi)$$
$A = \sqrt{a^2+b^2}$ ja $\cos\phi = \frac{b}{A}$, $\sin\phi = \frac{a}{A}$ eli $\phi = \arctan\frac{a}{b}$ $(\pm\pi)$

8. $f(x) = c\,e^{\alpha x}$

$y(x) = K\,e^{\alpha x}$ jos α ei ole kar. yhtälön juuri

$y(x) = K\,x\,e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 1–kertainen juuri

$y(x) = K\,x^2\,e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 2–kertainen juuri

9. $$y'' + \omega^2 y = p\cos\omega x + q\sin\omega x$$
$y(x) = A\,x\cos\omega x + B\,x\sin\omega x$, $A = -\frac{q}{2\omega}$ ja $B = \frac{p}{2\omega}$

10. $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

(i) yksinkertainen reaalijuuri λ_1; ratkaisu $e^{\lambda_1 x}$

(ii) yksinkertainen imaginaarijuuripari $\alpha \pm j\beta$; ratkaisut

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $e^{\alpha x}\sin\beta x$

(iii) k–kertainen reaalijuuri λ_1, ratkaisut

$e^{\lambda_1 x}$, $x e^{\lambda_1 x}$, $x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$

(iv) k–kertainen imaginaarijuuripari $\alpha \pm j\beta$, ratkaisut

$e^{\alpha x}\cos\beta x$, $x e^{\alpha x}\cos\beta x$, ..., $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x$, $x e^{\alpha x}\sin\beta x$, ..., $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

11. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ ...... $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)$

$$X(t) = \left[\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}\right]$$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, $\mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{u} \pm j\mathbf{v}$ ...... $\mathrm{Re}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$, $\mathrm{Im}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$

12. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\lambda t}\mathbf{k}$ ..... $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ ..... $(A - \lambda I)\mathbf{v} = -\mathbf{k}$

13. Integrointikaavoja:

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)), \quad F' = f, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$$

$$\int u(x)\underbrace{v'(x)\,dx}_{dv(x)} = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$