

MAT-10341 Insinöörimatematiikka A 4

Tentti 22.3.2007, Huikkola

Ei laskinta. Ei taulukoita. Ei kirjallisuutta. Vastaa neljään tehtävään. Onnea kokeeseen!

HUOM! Tee tehtävät 1 ja 2 yhdelle konseptipaperille. Tee tehtävät 3 ja 4 toiselle konseptipaperille. Palauta konseptipaperit omiin pinoihinsa.

Tehtävä 1 a) Laske ruuvikäyrän

$$\mathbf{r}(t) = (3 \cos(t), 3 \sin(t), 2t), t \in [-\pi, 2\pi]$$

kaarevuusvektori, kaarevuus ja kaarevuussäde parametrin arvoa $t = 0$ vastaavassa pisteessä.

b) Laske a-kohdan ruuvikäyrän kaaren pituus.

Tehtävä 2 a) Onko funktio

$$f(x, y, z) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

jatkuva. Perustele väitteesi. Voit käyttää perustelussasi tunnettuja tuloksia. Vastaa myös kysymyksiin: mikä on funktion f määrittelyjoukko, mikä arvojoukko?

b) Osoita, että funktiolla

$$g(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

ei ole raja-arvoa origossa. Vihje: Lähesty origoa kahta eri suoraa pitkin.

Tehtävä 3 a) Olkoon $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ja $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. Muotoile ketjusääntö yhdistetylle funktiolle $g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Mainitse oletukset, väite ja täydennä kysymysmerkit.

b) Olkoon

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$$

Laske

$$\nabla f(\mathbf{x}),$$

kun

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

(välivaiheet näkyviin).

Tehtävä 4 a) Määrittele differentioituvuus pisteessä \mathbf{x}_0 kuvaukselle $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

b) Linearisoi funktio

$$f(x, y) = e^{x+y} + \sin(xy)$$

origossa.