

1. Reaalilukujonoista  $(x_n)$  ja  $(y_n)$  tiedetään, että  $\lim x_n = 3$ , ja että  $x_n \leq y_n$ , kun  $n > 35$ . Osoita, että lukujonossa  $(y_n)$  on enintään äärellinen määrä negatiivisia termejä.
2. Olkoon  $f: X \rightarrow Y$  funktio ja  $f(A)$  joukon  $A (\subset X)$  kuva kuvauksessa  $f$ . Osoita, että
- a)  $A \subset f^{-1}(f(A))$
- b) Osoita, että jos  $f$  on injektio, niin  $A = f^{-1}(f(A))$ .
3. Reaalilukujono  $(x_n)$  on annettu rekursiivisesti:
- a)  $x_1 > 0$ ,  $x_{n+1} = 1 - x_n$
- b)  $x_1 > 0$ ,  $x_{n+1} = 1 + x_n$ .
- Määrittää  $\limsup x_n$  ja  $\liminf x_n$ .
- Tutki reaalilukujonon  $(x_n)$  suppenemista.
4. Olkoon  $A^\circ = \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ avoin}}} U$  joukon  $A (\subset \mathbf{R})$  sisäosa, ja  $\bar{A} = A \cup A'$  joukon  $A$  sulkeuma.
- Osoita, että kun  $A$  ja  $B$  ovat  $\mathbf{R} : n$  osajoukkoja, niin
- (i)  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$  (ii)  $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ .
- Anna esimerkki joukosta  $A (\neq \emptyset)$ , jolle
- (iii)  $\overline{A^\circ} = \emptyset$  ja  $(\bar{A})^\circ = \mathbf{R}$ .
5. Tutki funktion  $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  tasaista jatkuvuutta joukossa a)  $X = [0, \infty)$  b)  $X = (-1, 0)$ .
6. Olkoon  $f: X \rightarrow \mathbf{R}$  jatkuva funktio ( $X \subset \mathbf{R}$ ) ja  $A \subset \mathbf{R}$ . Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia, mitkä epätosia? Lyhyt perustelu tai vastaesimerkki.
- a) Joukko  $\{x \in X : f(x) > 0\}$  on avoin  $X$ :ssä.
- b) Jos  $X$  on väli, niin  $f(X)$  on väli.
- c) Joukko  $A$  on kompakti, jos siinä on äärellinen määrä alkioita.
- d) Joukko  $A$  on kompakti, jos joukossa  $A$  on suurin alkio  $\max A$  ja pienin alkio  $\min A$ .