

MAT-13410 Laaja matematiikka 1
10.10.2006.

- Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita eikä laskinta
- Kirjoita jokaiseen paperiin selvästi nimesi ja numerosi. Perustele ratkaisusi huolellisesti.
- Ratkaise jompikumpi tehtävistä 5 tai 5'. Jos ratkaiset molemmat, parempi suoritus lasketaan.

1. Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{array}{rcl} -x & +2y & -z = 1 \\ 2x & -y & +z = 2 \\ -3x & +3y & +(a^2 - 4)z = a + 2 \end{array}$$

jokaisella vakion $a \in \mathbb{R}$ arvolla. Määrää ne vakion a arvot, joilla yhtälöryhmällä on (a) täsmälleen yksi ratkaisu, (b) ei yhtään ratkaisua ja (c) ääretön määrä ratkaisuja?

2. Olkoot L ja T tasoja avaruudessa \mathbb{R}^3 . Millä ehdolla tasot leikkaavat? Jos tasot L ja T leikkaavat, niin esitä suoran yhtälö, joka kulkee pisteen (x_0, y_0, z_0) kautta ja on yhdensuuntainen tasojen L ja T leikkaussuoran kanssa. Perustele ratkaisusi tarkasti lähtemällä tasojen yhtälöistä ja käyttämistäsi tuloksista.

3. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 5 & -3 \\ -2 & 0 & -6 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 9 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

Määrää matriisin A sarakeavaruus. Mikä sarakeavaruuden dimensio ja kanta? Mikä on nolla-avaruuden dimensio?

4. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

Millä vakion $a \in \mathbb{R}$ arvolla A on ei-singulaarinen? Kun A^{-1} on olemassa, niin laske A^{-1} ja esitä A^{-1} ja A yksinkertaisten matriisien tulona.

5. Olkoon A $n \times n$ neliömatriisi ja $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että matriisiyhtälöllä $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ on yksikäsitteinen ratkaisu, jos ja vain jos matriisiyhtälöllä $A^2\mathbf{x} = 0$ on yksikäsitteinen ratkaisu.

5' Selvitä tarkasti, mitä tarkoittaa, että joukko U on avaruuden \mathbb{R}^n aliavaruus (2 pistettä). Jos U ja V ovat joukon \mathbb{R}^n aliavaruuksia, niin osoita, että

$$U + V = \{x + y \mid x \in U, y \in V\}$$

on joukon \mathbb{R}^n aliavaruus (2 pistettä). Jos $U \cap V = \{0\}$, niin mikä on alivaruuden $U + V$ kanta, jos $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ on aliavaruuden U ja $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ aliavaruuden V kanta (2 pistettä)?