

# MAT-13430 Laaja matematiikka 3

Tentti 13.03.2006

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!

- Osoita oikeaksi tai vääräksi:  
Jos funktiolla  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  on olemassa sellainen positiivinen vakio  $c$ , että  $|f(u) - f(v)| \leq c(u - v)^2$  kaikilla  $u, v \in \mathbb{R}$ , niin  $f$  on vakiofunktio.
  - Montako juurta yhtälöllä  $x^5 + 5x + 1 = 0$  on välillä  $-1 < x < 0$ ?
- Pitääkö paikkansa:  $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{3}{2}$ ? Ellei, niin korjaa ja selvitä tilanne.
  - Olkoon  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva ( $a < b$ ) ja  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Osoita, että silloin on olemassa välin  $[a, b]$  piste  $x_0$ , jossa  $f(x_0) = 0$ . Näytä lisäksi vastaesimerkillä, että epäjatkuvan funktion tapauksessa näin ei välttämättä ole.
- Osoita oikeaksi tai vääräksi: Jos  $a_n > 0$  ja  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ , niin sarja  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  suppenee.
- Määritä kaikki ne parametrin  $a$  arvot, joilla sarja  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left| \frac{3\sqrt{k} - 1}{\sqrt{k} + 1} + a \right|$  suppenee.
- Määritä kaikki pisteet  $x$ , joissa potenssisarja  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{\ln(k+2)} (x-4)^k$  suppenee.
  - Määritä funktiojonon  $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ ,  $x \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$  rajafunktio  $f : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  välillä  $I = [2, \infty)$ . Onko suppeneminen tasaista välillä  $I$ ?