6 Binomikertoimet (6p)

Oletetaan, että kertolasku on tavattoman kallis, ja sitä tulee välttää kaikin mahdollisin tavoin. Tehtävänä on laskea binomikertoimia. Määritellään ne positiivisille luvuille seuraavasti:

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k), n > k > 0$$

ja

$$C(n,0) = C(n,n) = 1.$$

Kirjoita *tehokas* algoritmi, joka laskee binomikertoimen. (3p.)
Analysoi algoritmisi ajankäyttöä (3p.)

7 Erikoistehtävä (6p)

Funktioiden $f(n)$ ja $g(n)$ kasvunopeuksia voidaan vertailla seuraavalla tavalla:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0 & \text{Tarkoittaa, että } f(n) \text{ kasvaa hitaammin kuin } g(n) \\ c & , c > 0 \text{ Tarkoittaa, että } f(n) \text{ kasvaa yhtä nopeasti kuin } g(n) \\ \infty & \text{Tarkoittaa, että } f(n) \text{ kasvaa nopeammin kuin } g(n) \end{cases}$$

Osoita, että jos tällä tavalla saadaan tulos, että f kasvaa hitaammin kuin g, niin tällöin pätee $f(n) = O(g(n)$. (2p)
Osoita, että jos tällä tavalla saadaan tulos, että f kasvaa yhtä nopeasti kuin g, niin tällöin $f(n) = \Theta(g(n))$. (2p)
Anna esimerkki funktioista, joilla tämä kasvunopeuksien vertailu ei onnistu, mutta on mahdollista O- ja Ω-notaatiolla.(2p)