# FYS.101 Yliopistofysiikka 1, kevät 2022



**Tentti 28.2.2022**

- **Kokeessa saa käyttää laskinta, mutta se ei saa olla ohjelmoitava.**
- **Kokeessa saa olla mukana itse käsin kirjoitettu lunttilappu (yksi A4, molemmat puolet). Lunttilappu tulee palauttaa koepaperin mukana.**
- Kääntöpuolella kaavoja ja vakioita.
- Jos suoritat Yliopistofysiikan sijaan vanhaa Insinöörifysiikan kurssia, kirjoita tehtäväpaperiin: "FYS-1080 Insinöörifysiikka I: teoria ja laboratorioharjoitukset" tai "FYS-1091 Insinöörifysiikka I" riippuen siitä kumpaa suoritat

1 Tasaisella radalla ajavan auton nopeus maan suhteen voidaan kirjoittaa ajan funktiona

$$\vec{v}(t) = [3.0\,\mathrm{m/s} + (0.90\mathrm{m/s^3})t^2]\hat{\imath} + [(1.6\mathrm{m/s^2})t]\hat{\jmath}$$

a) Laske auton kiihtyvyys vektorimuodossa ajan hetkellä $t = 2.0\,\mathrm{s}$.
b) Laske auton paikka ajan hetkellä $t = 2.0\,\mathrm{s}$, kun ajan hetkellä $t = 0$ auto on paikassa $(3.0\mathrm{m})\hat{\jmath}$.
c) Mikä on auton nopeus ajan hetkellä $t = 2.0\,\mathrm{s}$ toisen auton $B$ koordinaatistosta katsottuna, jos tämä toinen auto liikkuu maan suhteen nopeudella $\vec{v}_2 = (5.0\,\mathrm{m/s})\hat{\imath} - (2.0\,\mathrm{m/s})\hat{\jmath}$?

Ratk: a) derivoi ensin nopeuden lauseke ajan suhteen: $\boxed{v_x = \frac{dx}{dt}}$

sijoita tähän annettu ajan arvo: $3.6\,\mathrm{m/s^2}\hat{\imath} + 1.6\mathrm{m/s^2}\hat{\jmath}$

b) integroi paikan lauseke, huomioi alkupaikka $\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x dt}$

sijoita annettu arvo: $8.4\,\mathrm{m}\hat{\imath} + 6.2\mathrm{m}\hat{\jmath}$

c) suhteellisen nopeuden kaavalla: $\boxed{\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A}}$ joten $\vec{v}_{P/B} = \vec{v}_{P/A} - \vec{v}_{B/A}$

Oikea vastaus: $1.6\,\mathrm{m/s}\,\hat{\imath} + 5.2\mathrm{m/s}\,\hat{\jmath}$

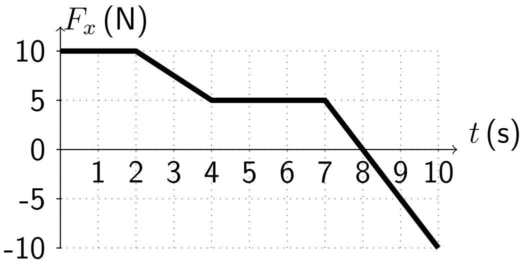
2 Karusellin hitausmomentti keskiakselin suhteen on $65.0\,\mathrm{kgm^2}$. Moottori alkaa pyörittämään karusellia levosta siten että siihen kohdistuva nettovääntömomentti keskiakselin suhteen pysyy vakiona 156 Nm.
a) Laske karusellin kulmanopeus 5.0 s moottorin käynnistämisen jälkeen
b) Kiekko on laitettu karusellin lattialle etäisyydelle 0.44 m keskiakselista. Karusellin pyöriessä kiekon etäisyys pyörähdysakseliin pysyy ensin vakiona kitkan vuoksi. Kiekon ja alustan välinen lepokitkakerroin on 0.60. Millä ajan hetkellä pyörimisen alkamisen jälkeen kiekko irtoaa paikaltaan ja alkaa liukua pinnalla kohti karusellin ulkokehää?

Ratk. a) koska nettovääntömomentti on vakio, niin myös kulmakiihtyvyys on vakio:

$$\omega_z = \omega_0 + \alpha_z t = \sum \tau_z / It = 12\,\mathrm{rad/s}$$

b) Kitka toimii nyt ainoana keskihakuvoimana. Siten $F_\mu = mv^2/r \leq \mu n = \mu mg$. Kun huomioidaan vielä $v = \omega r$ ja $\omega = \alpha t$, niin $t \leq 1.5\,\mathrm{s}$

③ Mies kohdistaa 25 kg:n laatikkoon $x$-akselin suuntaisen voiman, joka riippuu ajasta oheisen kuvaajan mukaisesti. Laatikko on aluksi levossa, mutta voiman kohdistamisen jälkeen se liukuu vaakasuoralla kitkattomalla alustalla.
a) Laske laatikon liikemäärän muutos aikavälillä $0 \to 10\,\mathrm{s}$. (4p)
b) Mikä on laatikon nopeus ajan hetkellä $t = 10.0\,\mathrm{s}$? (2p)



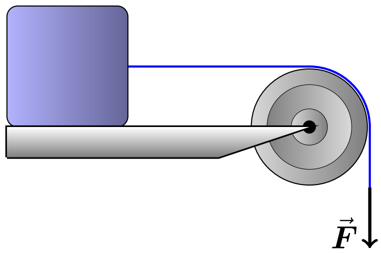

Ratk. Liikemäärän muutos on sama kuin kappaleen saama impulssi, joka taas on voiman integraali:

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{J}} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{\boldsymbol{F}} dt} \quad \boxed{\vec{\boldsymbol{J}} = \Delta \vec{\boldsymbol{p}}}$$

Graafinen integrointi antaa $42.5\,\mathrm{Ns} \approx 40\,\mathrm{Ns}$. Huomatkaa, että $t$-akselin alapuolinen osa tulee huomioida negatiivisena.

b) $p_x = mv_x$, joten nopeus tulee edellisestä helposti. Vastaus $1.7\,\mathrm{m/s}$.

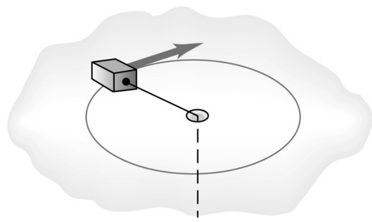
④ Tasolla makaavaan laatikkoon (2.0 kg) on kiinnitetty vaakasuorassa oleva massaton, joustamaton köysi. Köysi on kierretty väkipyörän (hitausmomentti 0.040 kgm$^2$, säde 0.20 m) ympäri. Köydestä vedetään alaspäin voimalla $\vec{\boldsymbol{F}}$, jonka suuruus on 18 N. Tällöin laatikko lähtee liukumaan oikealle ja väkipyörä pyörimään paikallaan köyden kulkiessa sen kehällä liukumatta. Laatikon ja tason välinen liikekitkakerroin on $\mu_k = 0.52$.
a) Piirrä väkipyörän ja laatikon vapaakappalekuvat. (2p)
b) Laske laatikon kiihtyvyys. (4p)




Ratk. a) Vapaakappalekuvassa vaadittiin laatikkoon kaikki voimat. Väkipyörän tapauksessa täysiin pisteisiin riitti vääntävät voimat, jos kiihtyvyys/kulmakiihtyvyys oli oikein.

b) Laatikolle tarvittiin Newton II vaaka- ja pystysuuntaan sekä kitkayhtälö. Väkipyörälle tarvittiin pyörimisliikkeen NII. Lisäksi tarvittiin myös geometrinen yhteys $a = \alpha R$. Yhdistämällä kaikki saatiin laatikon kiihtyvyydeksi $2.6\,\mathrm{m/s^2}$.

⑤ Kitkattomalla vaakasuoralla pinnalla pyörivä palikka on kiinni massattomassa langassa, joka läpäisee pinnassa olevan aukon. Langasta vedetään niin, että ympyräliikkeen säde pienenee. Säilyvätkö seuraavat palikkaa kuvaavat suureet vedon aikana: (i) liikemäärä, (ii) kulmaliikemäärä, (iii) mekaaninen energia? Perustele kukin vastaus 1-2 lauseella ja mahdollisesti sopivalla kaavalla.



Ratk. (i) Liikemäärä ei säily, sillä $\vec{\boldsymbol{p}} = m\vec{\boldsymbol{v}}$, ja ympyräliikkeessä nopeuden suunta muuttuu koko ajan.

(ii) Kulmaliikemäärä säilyy keskipisteen suhteen, sillä nettovääntömomentti on nolla.

(iii) Mekaaninen energia ei säily, sillä vetävä voima tekee kappaleeseen työtä säteen pienentyessä.

Monen eri tyyppiset (mutta perusteelliset ja oikeat) riittivät täysiin pisteisiin.

# FYS.101 Yliopistofysiikka 1, kaavakokoelma

$G = 6.674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$

Maa: $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$, $m_E = 5.974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R_E = 6.371 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$

$\boxed{\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\boldsymbol{k}}}$ $\boxed{\text{Pallo: } A = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3}$

$\boxed{v_{\mathrm{av},x} = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$ $\boxed{v_x = \frac{dx}{dt}}$ $\boxed{a_{av,x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}}$ $\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt}}$ $\boxed{v_x(t) = v_{0,x} + \int_{t_0}^{t} a_x dt}$ $\boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x dt}$

$\boxed{\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{av}} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{r}}}{\Delta t}}$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}}$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{av}} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta t}}$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt}}$ $\boxed{a_{\mathrm{rad}} = \frac{v^2}{R}}$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{v}}_{P/A} = \vec{\boldsymbol{v}}_{P/B} + \vec{\boldsymbol{v}}_{B/A}}$

$\boxed{\sum \vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}}$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{F}}_{A\to B} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{B\to A}}$ $\boxed{f_k = \mu_k n}$ $\boxed{f_s \le \mu_s n}$

$\boxed{W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{l}}}$ $\boxed{W = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{s}}}$ $\boxed{W_{\mathrm{tot}} = \Delta K}$ $\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}$ $\boxed{W_{\mathrm{other}} = \Delta E}$ $\boxed{E = K + U}$

$\boxed{P = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{F}} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}\right)}$ $\boxed{U_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}kx^2}$

$\boxed{U_{\mathrm{grav}} = mgy}$ $\boxed{F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}}$ $\boxed{U_{\mathrm{grav}} = -\frac{Gm_Em}{r}}$

$\boxed{\vec{\boldsymbol{J}} = \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{\boldsymbol{F}} dt}$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{J}} = \Delta\vec{\boldsymbol{p}}}$ $\boxed{\sum \vec{\boldsymbol{F}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{p}}}{dt}}$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{P}} = M\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathrm{cm}}}$

$\boxed{v = r\omega}$ $\boxed{a_{\tan} = r\alpha}$ $\boxed{s = r\theta}$ $\boxed{I = \int r^2 dm}$ $\boxed{I_P = I_{\mathrm{cm}} + md^2}$ $\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z d\theta}$

$\boxed{\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}}$ $\boxed{\vec{\boldsymbol{L}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}}$ $\boxed{\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{L}}}{dt}}$ $\boxed{\sum \tau_z = I\alpha_z}$