

**MAT-01120 Insinöörimatematiikka B1 / Riikka Kangaslampi (SC309)**  
**Tentti 16.10.2019 klo 17-20**

Ratkaise kaikki neljä tehtävää. Kukin niistä on kuuden pisteen arvoinen.  
Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukkokirjoja. Tehtäväpaperin kääntöpuolella on kaavakokoelma.

Muista perustella ratkaisusi huolellisesti!

**Tehtävät**

- 1) Osoita induktiolla, että kaikille positiivisille kokonaisluvuille  $n$  pätee

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

- 2) Tarkastellaan reaalfunktioita  $f(x) = 2 \ln(2x - 6)$  ja  $g(x) = 3 + e^x$ . Muodosta yhdistettyjen funktioiden  $f \circ g$  ja  $g \circ f$  lausekkeet ja sievennä ne. Selvitä lisäksi yhdistettyjen funktioiden määrittelyjoukot.

- 3) a) Osoita erotusosamäärän raja-arvon kautta, että funktion  $f(x) = x^2 + 3x$  derivaatta on  $f'(x) = 2x + 3$ .

- b) Laske integraali

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin(x) \cos^2(x) dx.$$

- 4) a) Olkoon  $z = 4 - 3i$  ja  $w = 2 + i$ . Laske tulo  $z \cdot w$  ja osamäärä  $\frac{z}{w}$  ja anna vastaukset muodossa  $a + bi$ .

- b) Etsi polynomin  $p(x) = x^3 - 8x^2 + 25x$  kaikki nollakohdat.

## Kaavakokoelma

kulma	sin	cos	tan
0	0	1	0
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$D_y f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (y = f(x))$$

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$$

$$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geq 1)$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \quad (-1 < x < 1)$$

$$D \sinh x = \cosh x$$

$$D \cosh x = \sinh x$$

$$D \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$D \operatorname{arsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$D \operatorname{arcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1)$$

$$D \operatorname{artanh} x = \frac{1}{1-x^2} \quad (-1 < x < 1)$$