

MAT-02651 Algoritmimatematiikka / Kaarakka
Tentti (4) 21.1.2020

Vastaa kaikkiin kysymyksiin ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta. Kaavat löytyvät paperin toiselta puolelta. Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös tutkintoohjelmasi.

Tehtävät

1. (a) (3 pistettä) Tarkastellaan binäärirelaatioita R, S ja T . Osoita todeksi tai näytä vastaesimerkillä vääräksi, että $(R \circ S) \cap (R \circ T) \subset R \circ (S \cap T)$.
- (b) (3 pistettä) Osoita, että relaatio $R : \mathbb{Q} \leftrightarrow \mathbb{Q}$ on ekvivalenssirelaatio tai näytä vastaesimerkillä, että se ei ole ekvivalenssirelaatio, kun aRb jos ja vain jos $a - b$ on kokonaisluku.

2. Tarkastellaan Boolean algebraa $\langle B; +, \cdot, \bar{}, 0, 1 \rangle$, jolle on voimassa $\forall x, y, z \in B$:

$$\begin{array}{ll} (x+y)+z = x+(y+z) & (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\ x+y = y+x & x \cdot y = y \cdot x \\ x+0 = x & x \cdot 1 = x \\ x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) & x + (y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z) \end{array}$$

$\forall x \in B; x + \bar{x} = 1$ ja $x \cdot \bar{x} = 0$, kun \bar{x} on alkion x *komplementti* tai *negaatio*.

- (a) (3 pistettä) Osoita, että $x = x \cdot x$.
 - (b) (3 pistettä) Osoita, että $x + yz + \bar{x}y + \bar{y}xz = x + y$.
3. (a) (4 pistettä) Osoita epäsuoraa todistusta käyttäen (ilman totuustaulua), että

$$((W \vee S) \wedge (W \rightarrow M) \wedge (S \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow M$$
 on pätevä teoria.

- (b) (2 pistettä) Seuraavana on kaksi väitettä. Jos väite on tosi, niin perustele se ja jos epätosi, niin kumoa se. Muistutuksena $\mathbb{R}_+ = \{x \mid x > 0 \wedge x \in \mathbb{R}\}$
 - (i) $\forall u \in \mathbb{R}_+, \exists v \in \mathbb{R}_+ : uv < v$,
 - (ii) $\exists u \in \mathbb{R}_+, \forall v \in \mathbb{R}_+ : uv < v$,
4. (a) (3 pistettä) Todista oikeaksi tai kumoa seuraavat väitteet
 - (i) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$ on surjektio,
 - (ii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = \lfloor x \rfloor$ on injektio.
 - (b) (3 pistettä) Osoita määritelmän nojalla, että

$$n^3 - 4n^2 + 19 = O(n^3).$$