Tampereen yliopisto, ITC
Todennäköisyyslaskenta (MTTTP4, korvaa kurssia MAT-02500)
Uusinta 14. 1. 2020

Omat taulukot ja laskimet ovat kiellettyjä. Vastaukset pitää perustella.

1. Pelaajalle jaetaan korttipakasta umpimähkään viisi korttia. [Korttipakassa on 52 korttia, jotka jakautuvat neljän maan kortteihin: hertat $\heartsuit$, ruudut $\diamondsuit$, ristit $\clubsuit$ ja padat $\spadesuit$. Kussakin maassa on 13 korttia, joilla on arvot 1–13.]

a) Mikä on satunnaiskokeeseen sopiva perusjoukko eli alkeistapausten joukko?

b) Kuinka monella eri tavalla pelaaja voi saada täyskäden eli sekä kolmoset (kolme samanarvoista korttia) että lisäksi parin (kaksi samanarvoista korttia)?

c) Mikä on $\mathbb{P}(A)$, kun A on tapahtuma "pelaajan käsi on täyskäsi".

2. Pelaajien Otso Linna ja Juha Mäkärä välinen tennisottelu keskeytyy ennakkosuosikin Otso Linna ollessa tappiolla 0–1. Ottelun tulee voittamaan se pelaajista, joka voittaa ensinnä kolme erää. Otso voittaa erän todennäköisyydellä 0,8 ja Jaakko todennäköisyydellä 0,2. Lisäksi erien lopputulosten oletetaan olevan toisistaan riippumattomia. Kuinka suuri on todennäköisyys, että Otso voittaa ottelun sitä jatkettaessa?

3. Tarkastellaan satunnaismuuttujia X ja Y, joista tiedetään, että odotusarvot $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$ ja $\mathbb{E}(XY)$ ovat olemassa. Pitääkö kaava

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X\,\mathbb{E}Y$$

yleisesti paikkansa? Jos pitää, todista kaava siinä erikoistapauksessa, että satunnaismuuttujien X ja Y arvojoukoissa on kummassakin vain kaksi alkiota. Jos ei, esitä esimerkki tilanteesta, jossa $\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}X\ \mathbb{E}Y$. (Mahdollisen esimerkin satunnaismuuttujien ei tarvitse olla kaksiarvoisia.)

4. Jatkuvasti jakautuneella satunnaismuuttujalla X on tiheysfunktio $f\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = c\max\{1 - x^2, 0\}.$$

a) Määritä vakio c sillä periaatteella, että varman tapahtuman todennäköisyys on 1.

b) Määritä satunnaismuuttujan X kertymäfunktio F.

c) Laske odotusarvo $\mathbb{E}X$ ja varianssi $\mathbb{D}^2X$.

Jatkuvia jakaumia

Jakaumatyyppi: Tasainen jakauma

Parametrit: $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathrm{Tas}(a, b)$

Tiheysfunktio:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{kun } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$

Jakauma: Standardinormaalijakauma

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$

Tiheysfunktio:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Standardinormaalijakauman kertymäfunktion arvoja:

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5	2	3
$\Phi(x)$	0,579	0,655	0,726	0,788	0,841	0,933	0,977	0,999

Jakaumatyyppi: Normaalijakauma

Parametrit: μ, σ^2

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

Määrittely:

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) \iff \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

Diskreettejä jakaumia

Ptnf lyhentää sanaa "pistetodennäköisyysfunktio".

Jakaumatyyppi: Binomijakauma

Parametrit: $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$

Ptnf: $f(k) = \mathbb{P}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, kun $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$.

Jakaumatyyppi: Hypergeometrinen

Parametrit: $N, K, n \in \mathbb{N}$, $N \geq K$, $N \geq n$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathrm{Hyperg}(N, K, n)$

Ptnf:

$$f(k) = \mathbb{P}\{X = k\} = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

kun $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \min\{K, n\}$.

Jakaumatyyppi: Geometrinen

Parametrit: $p \in [0, 1]$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathrm{Geom}(p)$

Ptnf: $f(k) = \mathbb{P}\{X = k\} = p(1-p)^k$.

Jakaumatyyppi: Poisson-jakauma

Parametrit: $\lambda > 0$

Satunnaismuuttuja: $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$

Ptnf: $f(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \lambda^k / k!$.