MAT-02450 Fourier'n menetelmät

Tentti 28.2.2019 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
Muista, että pisteet tulevat perusteluista eikä arvauksista.

1. Jaksollinen funktio f on määritelty yhtälöillä

$$\begin{cases} f(t) = -t, & \text{kun } -\pi/2 < t < \pi/2, \\ f(t+\pi) = f(t). \end{cases}$$

Laske määritelmän mukaisesti sille trigonometrinen Fourier-sarja.

2. Funktiolla f on jaksona 3π. Sen Fourier-sarjan kertoimet $c_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ on laskettu ja niistä ainoat nollasta eroavat kertoimet ovat $c_2 = 3 + 3j$ ja $c_0 = \sqrt{3}$.
a) Esitä F-sarjan arvot määrittävä lauseke sievennettynä kolmessa eri muodossa (Fourier-sarjan eksponenttimuoto, trigonometrinen muoto ja ns. kolmas muoto).
b) Laske funktion f keskimääräinen teho.

3. Jos jatkuvan funktion f Fourier-muunnos on $F(\omega)$, niin määritä muunnos funktiolle g, kun

a) $g(t) = 3f'(t) - 2f(t-3)$, **b)** $g(t) = \cos(4t) f(2t + \pi)$.

4. Laske

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2t)\sin\big(3(x-t)\big)}{t(x-t)}\, dt.$$

Pari muunnosta, joista on apua tai sitten ei:
1. $\mathscr{F}\{\mathrm{sinc}(t)\}(\omega) = \pi \mathrm{rect}_1(\omega)$ 2. $\mathscr{F}\{H(t)e^{-|a|t}\}(\omega) = \frac{1}{|a|+j\omega}$

Kaavakokoelma

$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$, $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$,

$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big)$, $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big)$,

$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)$.

$$\hat{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)\Big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|c_n|\cos(n\omega t + \theta_n)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt, & n &= 0,1,2,3,\ldots \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_d^{d+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt, & n &= 1,2,3,\ldots \\ c_n &= \frac{1}{T}\int_d^{d+T} f(t)e^{-jn\omega t}\,dt, & n &= 0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T}\int_d^{d+T} f^2(t)\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$$

$$G_n = \sum_{k=0}^{N-1} g_k e^{-jnk\frac{2\pi}{N}},\ n = 0,1,2,\ldots,N-1, \qquad g_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} G_n e^{jnk\frac{2\pi}{N}},\ k = 0,1,2,\ldots,N-1.$$

$$\mathscr{F}\{f\}(\omega) = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-j\omega u}\,du, \qquad \mathscr{F}^{-1}\{F\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega.$$

$\mathscr{F}\{f(at)\}(\omega) = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$, $a \neq 0$, $\mathscr{F}\{f'(t)\}(\omega) = j\omega F(\omega)$

$\mathscr{F}\{f(t-a)\}(\omega) = e^{-ja\omega}F(\omega)$, $\mathscr{F}\{e^{jbt}f(t)\}(\omega) = F(\omega - b)$

$\mathscr{F}\{(f*g)(t)\}(\omega) = F(\omega)G(\omega)$, $\mathscr{F}\{f(t)g(t)\}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(F*G)(\omega)$

$\mathscr{F}\{\mathscr{F}\{f\}(t)\}(\omega) = \mathscr{F}\{F(t)\}(\omega) = 2\pi f(-\omega)$, $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)g(x)\,dx$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega$$

$$\hat{F}(\omega) = h\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)e^{-j\omega kh}, \qquad \{\hat{F}_n\}_{n=0}^{N-1} = \{hG_n\}_{n=0}^{N-1}.$$