

# MAT-01110 Insinöörimatematiikka A1

## Tentti 19.10.2017 / Kimmo Vattulainen

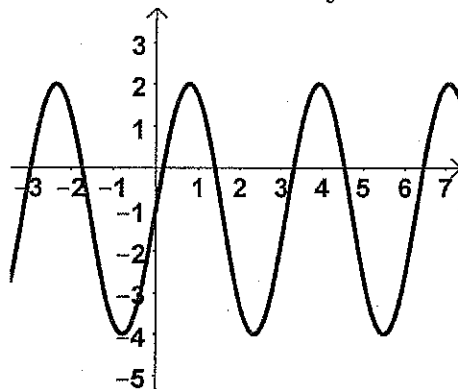
- Vastaa jokainen tehtävä eri konseptille.
  - Ei laskimia.
  - Kääntöpuolella kaavakokoelma
- 

1. Tutkitaan alla olevan kuvan funktiota, joka on muotoa  $f(x) = a + b \sin(cx)$ .

a) Määritä kokonaisluvut  $a, b, c$ .

b) Kun rajoitetaan funktion määrittelyjoukoksi väli  $M_f = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ , funktiolla  $f(x)$  on käänteisfunktio. Mikä on käänteisfunktion lauseke, määrittely- ja arvojoukko.

c) Mikä on käänteisfunktion derivaattafunktio ja sen arvo  $(f^{-1})'(-1)$ .



2. Alla olevalla yhtälöllä on kolme ratkaisua  $z$  joukossa  $\mathbb{C}$ . Esitä kaikki ratkaisut muodossa  $z = re^{i\theta}$  ja myös muodossa  $z = a + bi$ .

$$\frac{5z^3 + 5z^3i}{4 + 12i} = -2 - 4i$$

3. Tutkitaan polynomia  $p(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 1$ .

a) Polynomilla on yksi juuri  $x = \frac{1}{3}$  ja muut juuret ovat kokonaislukuja. Esitä polynomi tekijämuodossa  $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

b) Määritä polynomin lokaalit ja globaalit ääriarvokohdat ja ääriarvot.

c) Piirrä funktion kuvaaja, josta näkyy funktion kulku nollakohtien ja ääriarvopisteiden läheisyydessä.

4. a) Osoita, että funktio  $f(x) = \frac{\sinh(x)}{e^x - 1}$  on aidosti vähenevä.

b) Mikä on funktion laajin mahdollinen määrittelyjoukko  $M_f$  ja arvojoukko  $A_f$ .

Perustele vastauksesi käyttämällä funktion aidosti vähenevyyttä ja raja-arvoja määrittelyjoukon reunapisteissä. Vihje: l'Hopitalin sääntö.



---

## Insinöörimatematiikka A 1

### Tentin kaavaliite

---

#### 1. Derivointikaavoja

$f(x)$	$f'(x)$
$a^x$	$a^x \ln a$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\operatorname{ar\,sinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{ar\,cosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{ar\,tanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

2.  $D_y f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad (y = f(x))$

3.  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

4.  $\operatorname{ar\,sinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \operatorname{ar\,cosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),$

$$\operatorname{ar\,tanh} x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

5.  $\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$   
 $\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$

6.  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$