MAT-01410 ja MAT-10430 Insinöörimatematiikka A4 ja C4

Tentti 11.9.2017 / Kimmo Vattulainen

- **Ei laskimia**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

---

1. Olkoon käyrä $\mathbf{r}(t) = (t,\ t^3,\ 4 - t^2),\quad t \in \mathbb{R}$.

a) Missä xy-tason pisteessä/pisteissä käyrä leikkaa xy–tason?

b) Mikä on käyrän pisteeseen $t = -1$ piirretyn tangenttisuoran parametriesitys?

c) Onko olemassa toista käyrän pistettä, jossa tangenttisuora on yhdensuuntainen b)-kohdassa määritellyn suoran kanssa? Jos on, niin mikä on tämä piste?

2. **a)** Onko funktiolla

$$f(x,y) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

raja-arvo origossa ja jos on, niin mikä on sen arvo.

b) Määritä pinnan

$$z = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

pisteeseen $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ piirretyn tangenttitason yhtälö.

3. Määritä funktion $f(x,y) = -2x^2 + 2x - y^2$ pienin ja suurin arvo joukossa $S = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

4. Kun levymäisen kappaleen S pinta-tiheys on $\delta(x,y)$, voidaan kappaleen massa m laskea kaavalla

$$m = \iint_S \delta(x,y)\ dy\ dx$$

a) Olkoon kappale S neliö $S = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ ja levyn pintatiheys $\delta(x,y) = x$. Kappale S jaetaan kahteen osaan S_1 ja S_2 suoralla $y = ax$, missä a on vakio ja $a \in [0,1]$. Millä vakion a arvolla osien S_1 ja S_2 massat ovat yhtäsuuret?

b) Olkoon kappale S ympyrälevyn osa $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ ja pintatiheys $\delta(x,y) = x$. Myös nyt kappale jaetaan suoralla $y = ax$, $a \in [0,1]$ kahteen, massaltaan yhtäsuureen osaan S_1 ja S_2. Mikä tässä tapauksessa on vakion a arvo?

Insinöörimatematiikka 4
Kaavakokoelma

1.

$$F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

2.

$$(G \circ F)'(\mathbf{x}) = G'(F(\mathbf{x}))F'(\mathbf{x})$$

3.

$$D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\mathbf{e} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}$$

4.

$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

5.

$$T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

6.

$$P_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T H\, f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

7.

$$P_m(x, y) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b)$$

8.

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) + \mu \nabla h(\mathbf{x}) \end{cases}$$

9.

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr\, d\theta$$

10.

$$\iiint_T f(x, y, z)\, dV$$
$$= \iiint_U f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

11.

$$m = \iiint_T \rho\, dV, \quad \overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\rho\, dV, \quad I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\rho\, dV$$

12.

$$\iint_A f(x, y)\, dxdy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv$$

13.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1}$$

14.

$$\int f'(g(t))g'(t)\, dt = f(g(t)) + C$$

$$\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C$$