

MAT-01400 Insinöörimatematiikka X 4 / Hirvonen

Tentti 11.09.2017

Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkkä lopputuloksen ilmoittaminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädyit.

1. Olkoon $f(x, y) = 2x\sqrt{x+2y}$
 - (a) Etsi funktion f suunnattu derivaatta pisteessä $(4, 6)$ suuntaan $(1, -2)$.
 - (b) Etsi jokin suunta, johon pisteestä $(4, 6)$ lähdettäessä funktion f arvo ei muutu.
 - (c) Mihin suuntaan pisteestä $(-2, 3)$ lähdettäessä funktion f arvo vähenee nopeimmin?
2. Etsi funktion $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy + 3y$ suurin ja pienin arvo kolmiossa, jonka kulmapisteet ovat origo, $(0, 2)$ ja $(2, 0)$.
3. Tarkastellaan käyriä C_1 ja C_2 , joiden parametrisoinnit ovat

$$C_1: \mathbf{r}_1(s) = (s - 2, 2s - 5), \quad s \in [0, 3],$$

$$C_2: \mathbf{r}_2(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

- (a) Esitä käyrät C_1 ja C_2 pelkästään muuttujien x ja y avulla.
 - (b) Olkoon \mathbf{a} seuraavista kolmesta pisteestä $(0, 4)$, $(-2, 0)$, $(2, -2)$ ainoa käyrän C_2 piste. Jos \mathbf{r}_2 kuvaa kappaleen paikkaa hetkellä t , mikä on kappaleen kiihtyvyys, kun se on pisteessä \mathbf{a} ?
4. Muunna integraali napakoordinaatteihin ja laske.

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^0 x^2 y \, dx dy$$

Insinöörimatematiikka X 4, kaavakokoelma

$$1. T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

$$2. (F \circ G)'(\mathbf{x}) = F'(G(\mathbf{x})) G'(\mathbf{x})$$

$$3. F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{x}) & D_2 f_m(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

$$4. \iint_R f(x, y) dx dy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$5. \begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad dx dy dz = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$6. m = \iiint_T \delta dV, \quad \bar{x} = \iiint_T x \delta dV, \quad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \delta dV$$

$$7. \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)), \quad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$$

$$8. \int_a^b f'(g(x)) g'(x) dx = \int_a^b f(g(x))$$

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = \int_a^b f(x) g(x) - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_a^b \ln |f(x)|$$