SGN-11000 Signaalinkäsittelyn perusteet
Tentti 11.5.2017
Heikki Huttunen

- ▷ Oma laskin sallittu.
- ▷ Tenttikysymyksiä ei tarvitse palauttaa.
- ▷ Merkitse vastauspaperiin koska olet suorittanut pakolliset harjoitukset (jos ei kevät 2017).
- ▷ Vastaa konseptille. Kirjoita myös nimesi ja opiskelijanumerosi.

1. Ovatko seuraavat väittämät tosia vai epätosia? (Perusteluja ei tarvita. Oikea vastaus: 1 p, väärä: $-\frac{1}{2}$ p, ei vastausta 0 p.) Pistemäärä pyöristetään ylöspäin lähimpään kokonaislukuun.

   (a) Sinisignaalin värähtelytaajuus on 8500 Hz, ja siitä otetaan näytteitä $T = \frac{1}{10000}$ sekunnin välein. Tällöin tulossignaali näyttää värähtelevän 5000 Hertsin taajuudella.

   (b) Signaalin $x(n)y(n)$ DFT on $X(n) * Y(n)$.

   (c) IIR-suotimet ovat aina stabiileja.

   (d) Järjestelmän impulssivaste määrää vasteen mille tahansa signaalille.

   (e) FIR-suotimen siirtymäkaistan leveys on kääntäen verrannollinen kertoimien määrään.

   (f) Lohkokaavion operaatio $\boxed{\uparrow 5}$ lisää 4 nollaa jokaisen kahden peräkkäisen näytteen väliin.

2. (a) Erään suotimen napanollakuvio on kuvassa 1 (vasen), ja tiedetään että sen amplitudivaste $|H(e^{i\omega})| \in [0, 1]$. Hahmottele suotimen amplitudivasteen kuvaaja niin tarkasti kuin se näillä tiedoilla onnistuu. (2p)

   (b) Onko kuvan 1 suodin stabiili? Millä perusteella? (2p)

   (c) Onko kuvan 1 suodin FIR vai IIR? Millä perusteella? (2p)

3. Oletetaan, että kausaalisen LTI-järjestelmän heräte $x(n)$ ja vaste $y(n)$ toteuttavat seuraavan differenssiyhtälön:

$$y(n) = y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) - x(n-2).$$

   (a) Määritä järjestelmän siirtofunktio $H(z)$.

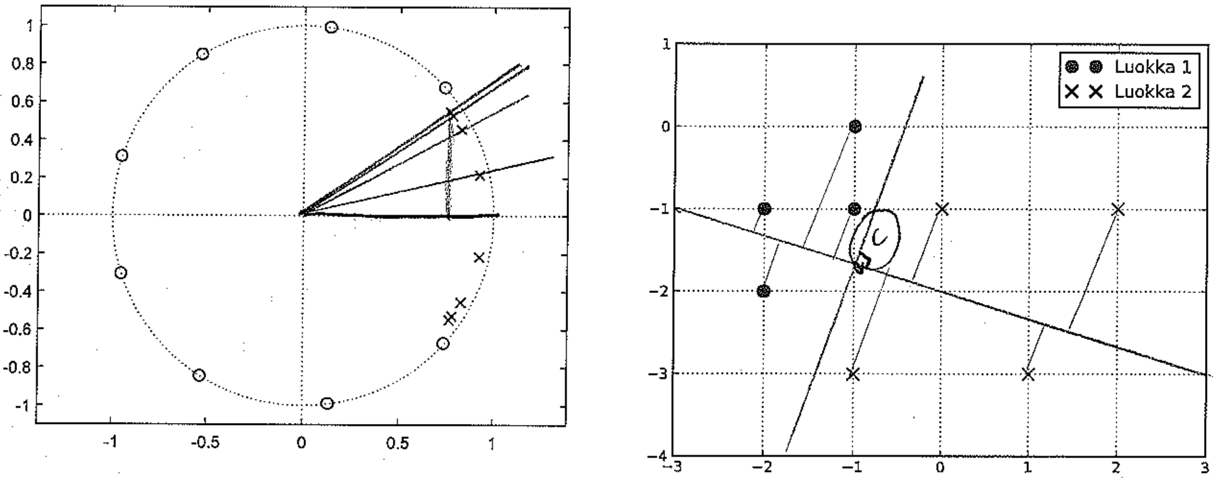
   (b) Piirrä napa-nollakuvio.

   (c) Onko järjestelmä stabiili? Miksi / miksi ei?

4. Signaalin näytteenottotaajuus halutaan nostaa 20 kHz $\rightarrow$ 30 kHz.

   (a) Piirrä lohkokaavio järjestelmästä, joka suorittaa muunnoksen. (3p)

   (b) Mitkä ovat tarvittavien suodinten estokaistat (alku-loppu)? (3p)



Kuva 1: Vasen: Tehtävän 2 napanollakuvio. Oikea: Tehtävän 5 aineisto.

5. Suunnittele Fisherin lineaarinen erottelija (LDA) kuvan 1 (oikea) datalle. Ilmoita ratkaisu muodossa

$$\text{Näytteen } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ luokka} = \begin{cases} 1, & \text{jos } \boxed{\textit{jotain}} \\ 2, & \text{muutoin} \end{cases}$$

Luokkien kovarianssimatriisit ovat:

$$\mathbf{C}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Joitakin aiheeseen ehkä liittyviä Wikipedia-sivuja

Suppose two classes of observations have means $\vec{\mu}_{y=0}, \vec{\mu}_{y=1}$ and covariances $\Sigma_{y=0}, \Sigma_{y=1}$. Then the linear combination of features $\vec{w} \cdot \vec{x}$ will have means $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=i}$ and variances $\vec{w}^T \Sigma_{y=i} \vec{w}$ for $i = 0, 1$. Fisher defined the separation between these two distributions to be the ratio of the variance between the classes to the variance within the classes:

$$S = \frac{\sigma^2_{between}}{\sigma^2_{within}} = \frac{(\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=1} - \vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=0})^2}{\vec{w}^T \Sigma_{y=1} \vec{w} + \vec{w}^T \Sigma_{y=0} \vec{w}} = \frac{(\vec{w} \cdot (\vec{\mu}_{y=1} - \vec{\mu}_{y=0}))^2}{\vec{w}^T (\Sigma_{y=0} + \Sigma_{y=1}) \vec{w}}$$

This measure is, in some sense, a measure of the signal-to-noise ratio for the class labelling. It can be shown that the maximum separation occurs when

$$\vec{w} = (\Sigma_{y=0} + \Sigma_{y=1})^{-1} (\vec{\mu}_{y=1} - \vec{\mu}_{y=0})$$

When the assumptions of LDA are satisfied, the above equation is equivalent to LDA.

Be sure to note that the vector $\vec{w}$ is the normal to the discriminant hyperplane. As an example, in a two dimensional problem, the line that best divides the two groups is perpendicular to $\vec{w}$.

Generally, the data points to be discriminated are projected onto $\vec{w}$; then the threshold that best separates the data is chosen from analysis of the one-dimensional distribution. There is no general rule for the threshold. However, if projections of points from both classes exhibit approximately the same distributions, the good choice would be hyperplane in the middle between projections of the two means, $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=0}$ and $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=1}$. In this case the parameter c in threshold condition $\vec{w} \cdot \vec{x} < c$ can be found explicitly:

$$c = \vec{w} \cdot (\vec{\mu}_{y=0} + \vec{\mu}_{y=1})/2$$

A more condensed form of the difference equation is:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{i=0}^{P} b_i x[n-i] - \sum_{j=1}^{Q} a_j y[n-j]\right)$$

which, when rearranged, becomes:

$$\sum_{j=0}^{Q} a_j y[n-j] = \sum_{i=0}^{P} b_i x[n-i]$$

To find the transfer function of the filter, we first take the Z-transform of each side of the above equation, where we use the time-shift property to obtain:

$$\sum_{j=0}^{Q} a_j z^{-j} Y(z) = \sum_{i=0}^{P} b_i z^{-i} X(z)$$

We define the transfer function to be:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{P} b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{Q} a_j z^{-j}}$$

Considering that in most IIR filter designs coefficient a_0 is 1, the IIR filter transfer function takes the more traditional form:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{P} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{Q} a_j z^{-j}}$$

Inversion of 2×2 matrices [edit]

The *cofactor equation* listed above yields the following result for 2×2 matrices. Inversion of these matrices can be done easily as follows:[2]

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Techniques [edit]

Practical approaches to sample-rate conversion include: converting to analog then re-sampling at the new rate, or calculating the values of the new samples directly from the old samples. The latter approach is generally preferred since it introduces less noise and distortion;[3] two possible implementation methods are as follows:

1. If the ratio of the two sample-rates is (or can be approximated by)[nb 1] a fixed, rational number L/M: generate an intermediate signal by inserting L–1 0s between each of the original samples. Low-pass filter this signal at half of the lower of the two rates. Select every M^{th} sample from the filtered output, to obtain the result.[4]
2. Treat the samples as geometric points and create any needed new points by interpolation. Choosing an interpolation method is a trade-off between implementation complexity and conversion quality (according to application requirements). Commonly used are: ZOH (for film/video frames), cubic (for image processing) and windowed sinc function (for audio).