MAT-01410 ja MAT-10430 Insinöörimatematiikka A4 ja C4
Tentti 13.6.2017 / Kimmo Vattulainen

- **Ei laskimia**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

---

1. Tutkitaan käyrää

$$\mathbf{r}(t) = \left(t^2 - 1,\ t^3 - t\right)$$

a) Käyrä leikkaa x-akselin kolme kertaa. Mitkä ovat nämä leikkauspisteet?
b) Muodosta tangenttisuorat kaikissa kolmessa a)-kohdan pisteessä. Nämä tangenttisuorat rajaavat kolmion. Mitkä ovat tämän kolmion kärkipisteet?

2. Jos kolmen ei-negatiivista reaalilukua a, b, c toteuttavat yhtälön $3a+2b+c = 120$, niin mikä on lukujen tulon abc suurin arvo?

3. **a)** Esitä yksi sellainen funktio F, jonka derivaattamatriisi on

$$F' = \begin{bmatrix} 6x + 4yz & 4xz & 4xy \\ 5 & 4yz & 2y^2 \end{bmatrix}$$

b) Mikä on funktion $f(x, y, z) = 3x^2y - 3xyz^2 + z^3$ kasvunopeus pisteessä $(1, 1, 1)$, kun suunta on pisteestä $(1, 1, 1)$ origoa $(0, 0, 0)$ kohti?

c) Kolmion K kärkipisteinä ovat $(0, 0)$, $(1, 2)$ ja $(3, 0)$. Laske

$$\iint_K 2x \, dA$$

4. Laske kappaleen $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x \leq 0, z \leq 0\}$ tilavuus
a) käyttäen napa- tai sylinterikoordinaatteja. Valitse integraalin rajat ja integroitava funktio juuri tämän kappaleen mukaan.
b) käyttäen pallokoordinaatteja. Valitse integraalin rajat ja integroitava funktio juuri tämän kappaleen mukaan.

Muut tavat ratkaista tehtävä 4, esim. käyttäen valmiita tilavuuden kaavoja, pyörähdyskappaleiden tilavuuksien kaavoja tai valitsemalla integroimisrajoiksi isompi kappale, josta tämä kappale on osa, eivät ole tässä tehtävässä hyväksyttyjä ratkaisuita.

Insinöörimatematiikka 4
Kaavakokoelma

1.

$$F'(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathrm{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathrm{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathrm{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathrm{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathrm{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathrm{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathrm{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathrm{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathrm{x}) \end{bmatrix}$$

2.

$$(G \circ F)'(\mathrm{x}) = G'(F(\mathrm{x}))F'(\mathrm{x})$$

3.

$$D_{\mathrm{e}} f(\mathrm{x}) = f'(\mathrm{x})\mathrm{e} = \nabla f(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{e}$$

4.

$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

5.

$$T(\mathrm{x}) = F(\mathrm{a}) + F'(\mathrm{a})(\mathrm{x} - \mathrm{a})$$

6.

$$P_2(\mathrm{x}) = f(\mathrm{a}) + f'(\mathrm{a})(\mathrm{x} - \mathrm{a}) + \frac{1}{2}(\mathrm{x} - \mathrm{a})^T H\, f(\mathrm{a})(\mathrm{x} - \mathrm{a})$$

7.

$$P_m(x, y) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!} \left((x - a)\frac{\partial}{\partial x} + (y - b)\frac{\partial}{\partial y} \right)^j f(a, b)$$

8.

$$\begin{cases} g(\mathrm{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathrm{x}) = \lambda \nabla g(\mathrm{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(\mathrm{x}) = 0 \\ h(\mathrm{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathrm{x}) = \lambda \nabla g(\mathrm{x}) + \mu \nabla h(\mathrm{x}) \end{cases}$$

9.

$$\iint_R f(x, y)\; dx\; dy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\; dr\; d\theta$$

10.

$$\iiint_T f(x, y, z)\; dV$$
$$= \iiint_U f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi\; d\rho\; d\theta\; d\phi$$

11.

$$m = \iiint_T \rho\; dV, \quad \overline{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\rho\; dV, \quad I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\rho\; dV$$

12.

$$\iint_A f(x, y)\; dxdy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|\; du\; dv$$

13.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1}$$

14.

$$\int f'(g(t))g'(t)\; dt = f(g(t)) + C$$
$$\int u(x)v'(x)\; dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\; dx + C$$
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\; dx = \ln|f(x)| + C$$