MAT-02650 Algoritmimatematiikka / Hirvonen
Tentti 21.10.2016
Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. Olkoon $A = \{1, 3, 6, 8\}$. Määritellään joukossa $A \times A$ relaatiot R ja S siten, että

$$aRb \quad \text{jos ja vain jos} \quad b \text{ on luvun } a \text{ tekijä eli } b|a$$
$$aSb \quad \text{jos ja vain jos} \quad a \operatorname{mod} \mathrm{b} \neq 0$$

   (a) Esitä alkioittain joukko $R^{-1} \cap S$.

   (b) Muodosta yhdistetty relaatio $R \circ S$. Onko se refleksiivinen? Onko symmetrinen? Onko transitiivinen?

2. (a) Olkoon $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Onko funktio $f : A \to A$, $f(x) = (5x) \operatorname{mod} 6$ injektio? Entä surjektio?

   (b) Merkitään $+(x, y) = x + y$ ja $\operatorname{div}(x, y) = \frac{x}{y}$. Sievennä (kaikki välivaiheet esittäen) $f(3, 4)$, kun

$$f = \operatorname{div} \circ \langle + \circ \langle \operatorname{div}, \operatorname{div} \circ \langle \mathbf{2}, \mathbf{1} \rangle \rangle, \mathbf{1} \rangle .$$

3. Alla on erään teorian inferenssitodistus ilman perusteluita. <u>Kopioi tämä vastauspaperiisi</u> ja täydennä puuttuvat perustelut. Mikä teoria tässä on todistettu?

1.	$A \to B$		________
2.	$B \to C$		________
3.		$\neg(A \to C)$	________
4.		$A \wedge \neg C$	________
5.		A	________
6.		B	________
7.		$\neg C$	________
8.		$\neg B$	________
9.		$B \wedge \neg B$	________
10.		$\mathbf{e}$	________
11.	$A \to C$		
M.O.T.			1.,2.,11. CP

4. (a) Todista, että kahden peräkkäisen kokonaisluvun summa on parillinen.

   (b) Todista induktiotodistuksella, että $n(n+1)(n+2)$ on jaollinen kuudella kaikille $n \in \mathbb{N}$.

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio	Ekvivalenssi
$\neg\neg p = p$	$p \lor \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \land \mathbf{t} = p$	$p \to \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \leftrightarrow q = (p \to q) \land (q \to p)$
	$p \lor \mathbf{e} = p$	$p \land \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \to \mathbf{e} = \neg p$	
	$p \lor p = p$	$p \land p = p$	$\mathbf{t} \to p = p$	
	$p \lor \neg p = \mathbf{t}$	$p \land \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \to p = \mathbf{t}$	De Morganin lait
			$p \to p = \mathbf{t}$	$\neg(p \land q) = \neg p \lor \neg q$
			$p \to q = \neg p \lor q$	$\neg(p \lor q) = \neg p \land \neg q$
			$p \to q = \neg q \to \neg p$	

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \land q = q \land p$	$p \land (q \land r) = (p \land q) \land r$	$p \land (q \lor r) = (p \land q) \lor (p \land r)$
$p \lor q = q \lor p$	$p \lor (q \lor r) = (p \lor q) \lor r$	$p \lor (q \land r) = (p \lor q) \land (p \lor r)$

Inferenssisääntöjä

MP	**MT**	**Conj**	**Simp**
$\dfrac{A,\ A \to B}{\therefore B}$	$\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	$\dfrac{A,\ B}{\therefore A \land B}$	$\dfrac{A \land B}{\therefore A}$
Add	**DS**	**HS**	
$\dfrac{A}{\therefore A \lor B}$	$\dfrac{A \lor B,\ \neg B}{\therefore A}$	$\dfrac{A \to B,\ B \to C}{\therefore A \to C}$	

muista rajoitukset

UI	**UG**	**EG**	**EI**
$\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	$\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \lor B(x)) = \exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \land B(x)) = \forall x\, A(x) \land \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \to B(x)) = \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \lor A(x)) = C \lor \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \land A(x)) = C \land \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \lor A(x)) = C \lor \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \land A(x)) = C \land \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \to A(x)) = C \to \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \to A(x)) = C \to \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \to C) = \exists x\, A(x) \to C$	$\exists x\, (A(x) \to C) = \forall x\, A(x) \to C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \land \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \lor B(x))$	$\forall x\, (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$
$\exists y\, \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x,y)$	