Tentti(2) MAT-02650 Algoritmimatematiikka
26.9. 2016 Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta. HUOM. Tehtävät EIVÄT ole vaikeusjärjestyksessä!

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi.

Muistathan antaa palautetta Kaiku-järjestelmän kautta saadaksesi opintosuorituksen.

1. (a) (3 pistettä) Osoita, että relaatio $R \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, joko on tai ei ole ekvivalenssirelaatio, kun relaatio R määritellään aRb joss $a - b \in \mathbb{Z}$.

   (b) (3 pistettä) Muuta lause $p \to (q \wedge \neg p)$ täyteen konjunktiiviseen normaalimuotoon (CNF)

2. (a) (3 pistettä) Olkoon $R = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,b\rangle\}$, $R : \{a,b,c,d\} \leftrightarrow \{a,b,c,d\}$. Esitä seuraavat sulkeumat

   * $r(R)$,
   * $s(R)$,
   * $t(R)$.

   (b) (3 pistettä) Osoita, että (avoimet) reaalilukuvälit $(1,2)$ ja $(4,10)$ ovat yhtä mahtavia.

3. Osoita tautologioita ja päättelysääntöjä käyttäen (ilman totuustaulua), että

$$\Big((A \leftrightarrow B) \wedge (A \to (C \vee D)) \wedge (C \to \neg B) \wedge A \Big) \to D$$

   on pätevä teoria.

4. (a) (2 pistettä) Osoita määritelmän nojalla, että $10n^2 - 15n + 2016 = \Omega(n^2)$.

   (b) (4 pistettä) Osoita induktioperiaatetta käyttäen, että $n^2 + n$ on parillinen kaikille $n \in \mathbb{N}$.

KAAVOJA ON PAPERIN TOISELLA PUOLELLA.

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio	Ekvivalenssi
$\neg\neg p = p$	$p \lor \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \land \mathbf{t} = p$	$p \to \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \leftrightarrow q = (p \to q) \land (q \to p)$
	$p \lor \mathbf{e} = p$	$p \land \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \to \mathbf{e} = \neg p$	
	$p \lor p = p$	$p \land p = p$	$\mathbf{t} \to p = p$	
	$p \lor \neg p = \mathbf{t}$	$p \land \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \to p = \mathbf{t}$	
			$p \to p = \mathbf{t}$	
			$p \to q = \neg p \lor q$	
			$p \to q = \neg q \to \neg p$	

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \land q = q \land p$	$p \land (q \land r) = (p \land q) \land r$	$p \land (q \lor r) = (p \land q) \lor (p \land r)$
$p \lor q = q \lor p$	$p \lor (q \lor r) = (p \lor q) \lor r$	$p \lor (q \land r) = (p \lor q) \land (p \lor r)$

De Morganin lait
$\neg(p \land q) = \neg p \lor \neg q$
$\neg(p \lor q) = \neg p \land \neg q$

Inferenssisääntöjä

MP $\dfrac{A,\ A \to B}{\therefore B}$	**MT** $\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	**Conj** $\dfrac{A,\ B}{\therefore A \land B}$	**Simp** $\dfrac{A \land B}{\therefore A}$
Add $\dfrac{A}{\therefore A \lor B}$	**DS** $\dfrac{A \lor B,\ \neg B}{\therefore A}$	**HS** $\dfrac{A \to B,\ B \to C}{\therefore A \to C}$	

muista rajoitukset

UI	**UG**	**EG**	**EI**
$\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	$\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \lor B(x)) = \exists x\, A(x) \lor \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \land B(x)) = \forall x\, A(x) \land \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \to B(x)) = \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$	$\forall x \forall y\, W(x,y) = \forall y \forall x\, W(x,y)$
$\exists x \exists y\, W(x,y) = \exists y \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \lor A(x)) = C \lor \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \land A(x)) = C \land \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \lor A(x)) = C \lor \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \land A(x)) = C \land \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \to A(x)) = C \to \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \to A(x)) = C \to \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \to C) = \exists x\, A(x) \to C$	$\exists x\, (A(x) \to C) = \forall x\, A(x) \to C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \land B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \land \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \lor \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \lor B(x))$	$\forall x\, (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$
$\exists y \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y\, W(x,y)$	