MAT-01300 Insinöörimatematiikka X 3 / Hirvonen
Tentti 22.09.2016
Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. Laske funktioiden $f(x) = x^2 - 4x$ ja $g(x) = 2x - x^2$ kuvaajien väliin jäävä pinta-ala välillä $x \in [1, 4]$.

2. (a) Muodosta Riemannin approksimaatio funktion $f(x) = 8x - x^2$ integraalille välillä $x \in [2, 5]$, kun väli jaetaan kolmeen osaan ja approksimaatiopisteinä ovat osavälien vasemmat päätepisteet.

   (b) Muodosta funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 5$ toisen asteen Taylorin polynomi pisteen $a = 1$ ympäristössä. Approksimoi sen avulla funktion arvoa pisteessä $x = 2$.

3. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' - 4y' + 3y = 10\sin(x).$$

4. Suppeneeko sarja?

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! \cdot 3^k}{4k+3}$

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{5k-2}$

Insinöörimatematiikka X 3, kaavakokoelma

1. Integroimiskaavoja

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x + C = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} + C$

2. $\displaystyle\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$

3. $\displaystyle s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$

4. $\displaystyle f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

5. Maclaurinin sarjoja:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R})$$