MAT-02400 Vektorianalyysi

Tentti 15.12.2016 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.

1. Laske vektorikentän

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(5z^3 + 7x + 9z,\ 15x + xe^{y(1-z)},\ x^2z^2\right)$$

divergenssi ja roottori sekä niiden arvot pisteessä $(2, 6, 1)$.

2. Vektorikenttä

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(6xy - 3,\ 3x^2 + 3y^2\right).$$

Määritä sen viivaintegraali pitkin tietä C, kun

(a) tie C on yksikköympyrän kehä positiiviseen kiertosuuntaan.

(b) tie C on seuraava. Aloitetaan pisteestä $(1, 0)$ ja mennään pitkin x-akselia pisteeseen $(-1, 0)$. Siitä jatketaan pitkin yksikköympyrän kehää pisteeseen $(0, 1)$, josta tullaan alas pitkin y-akselia pisteeseen $(0, -1)$. Siitä jatketaan pitkin yksikköympyrän kehää aloituspisteeseen $(1, 0)$.

(c) tie C on suora viiva pisteestä $(1, 0)$ pisteeseen $(2, 1)$.

3. Laske

$$\iint_S 6\sqrt{4y - 3}\, dS,$$

missä

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x^2 + 1,\ 1 \le x \le z, 1 \le z \le 2\right\}.$$

4. Vektorikenttä $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{2}{x} + xz, zy, z^2\right)$. Laske vektorikentän vuo pinnan S läpi poispäin origosta, kun

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0,\ x > 0\right\}.$$

Kaavakokoelma

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F}\, dA$$

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_\Omega f(\mathbf{r}(u, v))\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\|\, du\, dv$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_\Omega \mathbf{F}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\, du\, dv$$

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$$