

**MAT-01410 Insinöörimatematiikka A4 (kevät 2016) / Mattila**  
**Tentti 2.11.2016**

Vastaa kaikkien neljän kysymyksen kaikkiin kohtiin. Tehtävät eivät ole vaikeusjärjestyksessä. Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita. Myöskään erillistä kaavakokoelmaa ei ole, tarpeelliset kaavat on annettu tehtävänantojen yhteydessä. Tehtäväpaperia ei tarvitse palauttaa. Tehtävien ratkaisut löytyvät kokeen jälkeen kurssin Moodle-alueelta.

1. Tarkastellaan kahden muuttujan funktiota

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{xy}}{x + y}.$$

- (a) Määritä funktion  $f$  (laajin mahdollinen) määrittelyjoukko  $M_f$ . (1p)
- (b) Kuuluuko luku  $-\frac{1}{2}$  tai luku  $\frac{1}{2}$  funktion  $f$  arvojoukkoon  $A_f$ ? (1p)
- (c) Määritä raja-arvo  $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,18)} f(x, y)$ . (1p)
- (d) Osoita, että raja-arvoa  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  ei ole olemassa. (2p)
- (e) Määritä osittaisderivaatta  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ . (1p)

2. (a) Määritä funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$$

suurin ja pienin arvo äärellisessä kolmioalueessa, joka rajoittuu suoriin  $y = x$ ,  $y = 3$  ja  $x = 0$  (reunajanat kuuluvat myös alueeseen). (4p)

- (b) Määritä vektoriarvoisen funktion

$$F(x, y, z) = (e^{2x-y}, \ln(x^2 + y^3 + z^4))$$

derivaattamatriisi pisteessä  $(1, 1, 0)$ . (2p)

(Ohje: vektorifunktion derivaattamatriisissa  $i$ . rivin ja  $j$ . sarakkeen alkiona on  $i$ :nnen koordinaattifunktion derivaatta  $j$ :nnen muuttujan suhteen.)

3. (a) Määritä integraali

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \cos x^3 dx dy. \quad (3p)$$

Ohjeita: Laskeminen edellyttää integroimisjärjestyksen vaihtoa. Kiinnitä huomiota integroimisrajoihin, piirrä myös kuva integroimisalueesta.

(b) Olkoon

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 8\}.$$

Määritä napakoordinaatteja apuna käyttäen integraali

$$\iint_R \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dy dx. \quad (3p)$$

Ohjeita: Muista, että  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Hahmottele integroimisalue, etsi sille rajat napakoordinaateissa ja käytä kaavaa

$$\iint_R f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

4. (a) Laske  $\int_2^3 \int_0^1 \int_{-1}^1 \sqrt{y} - 3z^2 dz dy dx$ . (3p)

(b) Määritä integraali

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} yz dz dy dx$$

sylinterikoordinaatteja apuna käyttäen. (3p)

Ohjeita: Hahmottele ensin integroimisalue karteesisessa koordinaatistossa, muunna se sitten sylinterikoordinaatistoon ja käytä kaavaa

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iiint_U f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dz dr d\theta.$$