

B B Tentti (3)**Insinöörimatematiikka B3****B B 31.8.2016****MAT-01320 / Kaarakka**

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi. Lisäksi jätä etusivulle ja marginaaleihin tilaa tarkastajan merkintöjä varten.

Kaavaliite on tehtäväpaperin toisella puolella

1. (a) (3 pistettä) Laske käyttäen sijoitusta $u = 1 + e^{2x}$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx.$$

- (b) (3 pistettä) Osoita, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 4}$ suppenee tai hajaantuu.

2. (a) (3 pistettä) Laske integraali

$$\int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$$

- (b) (3 pistettä) Etsi differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu

$$2x \frac{dy}{dx} + y = 10\sqrt{x}$$

3. Etsi potenssisarjan suppenemissäde ja suppenemisväli tai -piste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n10^n} (x-3)^n.$$

4. (a) (3 pistettä) Hyttyspopulaation $p = P(t)$ kasvu on suoraan verrannollinen populaation koon neliöjuureen. Tarkastelun alussa, eli ajan hetkellä $t = 0$, hyttysiä on 1 miljoona. Kahden viikon kuluttua, ajan hetkellä $t = 2$, hyttysiä on 9 miljoonaa. Muodosta separoituva differentiaaliyhtälö, joka kuvaa tilannetta ja ratkaise se. Tämän jälkeen selvitä, milloin hyttyspopulaation koko ylittää 25 miljoonaa.

- (b) (3 pistettä) Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y''(x) - 2y'(x) - 35y(x) = 0, \quad y(0) = 12, \quad y'(0) = 0.$$

1.

| $f(x)$ | $\int f(x) dx$ |
|-------------------------------|---|
| $\tan(x)$ | $-\ln \cos(x) + C$ |
| $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ | $\ln \sin(x) + C$ |
| $\frac{1}{\cos^2(x)}$ | $\tan(x) + C$ |
| $\frac{1}{\sin^2(x)}$ | $-\cot(x) + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin(x) + C$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan(x) + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\operatorname{arsinh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{arcosh}(x) + C = \ln x + \sqrt{x^2-1} + C$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $\operatorname{artanh}(x) + C = \frac{1}{2} \ln \left \frac{x+1}{x-1} \right + C$ |

2. $s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$, $A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2} dx$, $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$

3. $\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$, $\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$

4. $\sum_{k=l}^{\infty} aq^k$, geometrisen sarja. Jos suppenee, niin $S = \frac{aq^l}{1-q}$.

5. $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$, $R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

6.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (x \in \mathbb{R})$$