MAT-01400 Insinöörimatematiikka X 4 / Hirvonen
Tentti 22.08.2016
Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. Käyrän C parametrisointi on $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 4t + 3, t^3 - 12t)$, $t \in [-5, 5]$.
   (a) Onko käyrä C sileä koko määrittelyjoukossaan?
   (b) Etsi kaikki pisteet (x, y), joissa käyrällä C on vaakasuora tangenttisuora.
   (c) Esitä funktion $f(x, y) = x\sqrt{x + 2y + 1}$ kuvaajalle (pinnalle) piirretyn tangenttitason yhtälö siinä pisteessä, jossa $(x, y) = \mathbf{r}(4)$.

2. (a) Tarkastellaan funktiota $f(x, y)$, jonka muuttujat x ja y riippuvat suureista r ja θ, ts. $x = g(r, \theta)$ ja $y = h(r, \theta)$. Tiedetään, että $g\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = -1$ ja $h\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Lisäksi

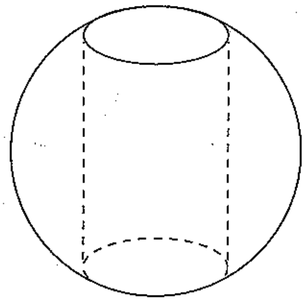
$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 1) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 5,$$

$$\frac{\partial x}{\partial r}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 6, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 7, \quad \frac{\partial y}{\partial r}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 8, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 9.$$

   Laske $\frac{\partial f}{\partial r}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ ja $\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.
   (b) Selvitä funktion $f(x, y, z) = z\ln(x^2 + y^2)$ määrittelyjoukko ja laske kaikki toiset osittaisderivaatat.

3. Etsi funktion $f(x, y) = x^3 - y - 3x + 1$ suurin ja pienin arvo suljetussa joukossa, jonka rajaavat koordinaattiakselit ja käyrä $y = (x - 1)^2$.

4. Kuulan $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ läpi porataan reikä, jonka reuna on sylinterin $x^2 + y^2 = 1$ muotoinen. Laske reiällisen kuulan tilavuus avaruusintegraalina.



Insinöörimatematiikka X 4, kaavakokoelma

1. $T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$

2. $(F \circ G)'(\mathbf{a}) = F'(G(\mathbf{a}))\, G'(\mathbf{a})$

3. $F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{x}) & D_2 f_m(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$

4. $\displaystyle\iint_R f(x, y)\, dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, drd\theta$

5. $\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \qquad dxdydz = \rho^2 \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta$

6. $\displaystyle m = \iiint_T \delta\, dV, \quad \overline{x} = \iiint_T x\delta\, dV, \quad I_z = \iiint_T \left(x^2 + y^2\right) \delta\, dV$

7. $\sin^2 t = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2t)), \qquad \cos^2 t = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2t))$

8. $\displaystyle\int_a^b f'(g(x))\, g'(x)\, dx = \Big/_a^b f(g(x))$

$\displaystyle\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \Big/_a^b f(x)\, g(x) - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$

$\displaystyle\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \Big/_a^b \ln|f(x)|$