MAT-01300 Insinöörimatematiikka X 3 / Hirvonen
Tentti 20.06.2016
Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. (a) Laske
$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx.$$
   (b) Suppeneeko integraali?
$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$$

2. Ratkaise differentiaaliyhtälö
$$y'' + 2y' - 3y = 3e^x.$$

3. (a) Ratkaise alkuarvotehtävä
$$y' = 6xy^2, \qquad y(1) = \frac{1}{3}.$$
   (b) Laske potenssisarjan avulla
$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{-\frac{1}{x^2}} - 1\right).$$
   Varmuudeksi: eksponenttifunktion eksponenttina on $-\dfrac{1}{x^2}$.

4. Muodosta funktiolle $f(x) = \sqrt[3]{x}$ toisen asteen Taylorin polynomiapproksimaatio kehityskeskuksen $x = 8$ lähistöllä ja approksimoi sen avulla lukua $\sqrt[3]{10}$.

Insinöörimatematiikka X 3, kaavakokoelma

1. Integroimiskaavoja

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh} x + C = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh} x + C = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} + C$

2. $\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$

3. $s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$

4. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$

5. Maclaurinin sarjoja:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R})$$