Tentti(1) MAT-02650 Algoritmimatematiikka
11.5. 2016 Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta. HUOM. Tehtävät EIVÄT ole vaikeusjärjestyksessä!

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi.

Muistathan antaa palautetta Kaiku-järjestelmän kautta saadaksesi opintosuorituksen.

1. (a) (3 pistettä) Olkoon $R = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,b\rangle\}$, $R : \{a,b,c,d\} \leftrightarrow \{a,b,c,d\}$. Esitä seuraavat sulkeumat
   - $r(R)$,
   - $s(R)$,
   - $t(R)$.

   (b) (3 pistettä) Osoita, että (avoimet) reaalilukuvälit $(1,2)$ ja $(4,10)$ ovat yhtä mahtavia.

2. Vastaa lyhyesti perustellen kohtien (a)-(f) kysymyksiin. Tarkastellaan joukkoja

$$R : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z},\ R = \{\langle a,b\rangle \,\big|\, |a| \geq b\} \text{ ja } S : \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Z},\ S = \{\langle a,b\rangle \,\big|\, |a| \leq b\}$$

   (a) Onko relaatio R transitiivinen?
   (b) Onko relaatio R ekvivalenssirelaatio?
   (c) Mikä on joukko $R \cap S$?
   (d) Onko relaatio $R \cap S$ funktio?
   (e) Onko relaatio $R \cap S$ injektio?
   (f) Onko relaatio $R \cap S$ surjektio?

3. Osoita tautologioita ja päättelysääntöjä käyttäen (ilman totuustaulua), että

$$\Big((A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (\neg C \to \neg B) \wedge (C \to D)\Big) \to D$$

   on pätevä teoria. Vinkki: epäsuoratodistus.

4. (a) (2 pistettä) Osoita määritelmän nojalla, että $\ln(2n^3 - 6n^2) = \Omega(\ln(n))$.

   (b) (4 pistettä) Täydennä seuraavaa todistukseen puuttuvat kohdat $\forall x\, (p(x) \to q(x)) \to (\exists x\, p(x) \to \exists x\, q(x))$

1.	$\forall x\ (p(x) \to q(x))$		P
2.		$\exists x\, p(x)$	______
3.		$p(d)$	______
4.		$p(d) \to q(d)$	______
5.		______	3, 4, MP
6.		$\exists x\, q(x)$	______
7.	______		2.6. CP, alitodistus
M.O.T			1.7. CP

KAAVOJA ON PAPERIN TOISELLA PUOLELLA.

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio	Ekvivalenssi
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$	$p \to \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$
	$p \vee \mathbf{e} = p$	$p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \to \mathbf{e} = \neg p$	
	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$	$\mathbf{t} \to p = p$	
	$p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \to p = \mathbf{t}$	
			$p \to p = \mathbf{t}$	
			$p \to q = \neg p \vee q$	
			$p \to q = \neg q \to \neg p$	

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

Inferenssisääntöjä

MP $\dfrac{A,\ A \to B}{\therefore B}$	**MT** $\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	**Conj** $\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$	**Simp** $\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	**DS** $\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$	**HS** $\dfrac{A \to B,\ B \to C}{\therefore A \to C}$	

muista rajoitukset

UI $\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	**UG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	**EG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	**EI** $\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \to B(x)) = \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$	$\forall x \forall y\, W(x,y) = \forall y \forall x\, W(x,y)$
$\exists x \exists y\, W(x,y) = \exists y \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \to A(x)) = C \to \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \to A(x)) = C \to \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \to C) = \exists x\, A(x) \to C$	$\exists x\, (A(x) \to C) = \forall x\, A(x) \to C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	$\forall x\, (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$
$\exists y \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x \exists y\, W(x,y)$	