

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Ratkaise tehtävät 1 ja 2 omalle paperilleen ja tehtävät 3 ja 4 omalle paperilleen. Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi. Lisäksi jätä etusivulle ja marginaaleihin tilaa tarkastajan merkintöjä varten.

Kaavaliite on tehtäväpaperin toisella puolella

1. (a) (2 pistettä) Laske käyttäen sijoitusta $x = u^2 - 1$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx.$$

- (b) (2 pistettä) Osoita, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n\sqrt{n}}$ suppenee tai hajaantuu.

- (c) (2 pistettä) Osoita, että jokainen lineaarinen ensimmäisen kertaluvun homogeeninen differentiaaliyhtälö on separoituva.

2. (a) (3 pistettä) Käyrä $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$ pyörrähtää x -akselin ympäri. Laske kappaleen sisään jäävä tilavuus tai osoita, että tilavuus on ääretön.

- (b) (3 pistettä) Laske epäoleellinen integraali $\int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx$ tai osoita, että se hajaantuu.

3. Etsi potenssisarjan suppenemissäde ja suppenemisväli tai -piste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n10^n} (x-3)^n.$$

4. (a) (2 pistettä) Etsi toisen kertaluvun lineaarisen homogeenisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

- (b) (2 pistettä) Etsi toisen kertaluvun lineaarisen epähomogeenisen differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu

$$y'' + y' - 2y = 4x.$$

- (c) (2 pistettä) Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y'' + y' - 2y = 4x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2.$$

1.

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) + C$
$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$	$\ln \sin(x) + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x) + C = \ln x + \sqrt{x^2-1} + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x) + C = \frac{1}{2} \ln \left \frac{x+1}{x-1} \right + C$

2. $s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx$, $A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2} dx$, $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$

3. $\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$, $\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$

4. $\sum_{k=l}^{\infty} aq^k$, geometrinen sarja. Jos suppenee, niin $S = \frac{aq^l}{1-q}$.

5. $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$, $R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

6.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (x \in \mathbb{R})$$