MAT-01220 Insinöörimatematiikka B2

Tentti 7.12.2015 / Kimmo Vattulainen

- **Vastaa jokainen tehtävä eri konseptille.**
- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

---

1. Olkoon avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteet $A = (2,0,1)$, $B = (1,1,0)$, $C = (1,2,1)$, $D = (1,1,1)$. Mikä pisteiden A, B, C määräämän tason piste on lähinnä pistettä D.

2. 3×5–matriisin A sarakkeina ovat vektorit **a**, **b**, **c**, **d** ja **e**, joten $A = [\,\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \mathbf{d}\ \mathbf{e}\,]$. Lisäksi tiedetään, että

$$A^T A = \begin{bmatrix} 14 & 6 & 0 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 12 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

Vastaa perustellen seuraaviin kysymyksiin. Mieti, mitä matriisin $A^T A$ alkiot ovat ja miten saat vastaukset kysymyksiin.

a) Mikä on vektorin $\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{d}$ pituus? Anna tarkka lukuarvo.

b) Onko matriisilla $A^T A$ käänteismatriisia? Entä jos muodostetaan neliömatriisi $B = [\,\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{e}\,]$, niin onko matriisilla B käänteismatriisia. Perustele vastauksesi.
Vihje: $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^T A)$, *determinantin laskusäännöt.*

c) Muodosta yksi avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortonormaali kanta. Anna vastaus joukkona, jonka alkiot ovat valitaan vektoreista **a**, **b**, **c**, **d**, **e** tarvittaessa skalaarilla kerrottuna.

3. Tehtävän 1 pisteet $A = (2,0,1)$, $B = (1,1,0)$, $C = (1,2,1)$, $D = (1,1,1)$ eivät olleet samalla tasolla. Määritä taso $z = ax + by + c$, joka pienimmän neliösumman mielessä sopii parhaiten tähän pistejoukkoon. *Vihje: Käytä ratkaisun jossain vaiheessa tulosta*

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 2 & \frac{3}{2} & -4 \\ -7 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

4. a) Määritä matriisin A ominaisarvot ja ominaisavaruudet.
b) Määritä diagonalisoimalla, mitä matriisia A^n lähestyy, kun $n \to \infty$.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

MAT-01220 Insinöörimatematiikka B2, kaavoja

1. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$

2. $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$

3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

4. $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u}$

5. $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$

6. $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$

7. $(AB)^T = B^T A^T, \ (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}, \ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

8. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

9. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

10. $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}, \ \det(A - \lambda I) = 0$

11. $S^{-1} A S = D \Leftrightarrow A = S D S^{-1}$

12. $A^T A \overline{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$