$16+9$

25

SGN-11000 Signaalinkäsittelyn perusteet
Tentti 30.9.2015
Heikki Huttunen

$0{,}125 \cdot 8 =$

- ▷ Oma laskin sallittu.
- ▷ Tenttikysymyksiä ei tarvitse palauttaa.
- ▷ Merkitse vastauspaperin alkuun koska olet suorittanut pakolliset harjoitukset.
- ▷ Vastaa konseptille. Kirjoita myös nimesi ja opiskelijanumerosi.

1. Ovatko seuraavat väittämät tosia vai epätosia? (Perusteluja ei tarvita. Oikea vastaus: 1 p, väärä: $-\frac{1}{2}$ p, ei vastausta 0 p.) Pistemäärä pyöristetään ylöspäin lähimpään kokonaislukuun.

   (a) Signaalin $x(n)y(n)$ DFT on $X(n)Y(n)$.

   (b) Vaihevasteen lineaarisuus takaa, että signaalin kaikki taajuudet viivästyvät yhtä monta sekuntia.

   (c) FIR-suodin on aina stabiili.

   (d) Jatkuva-aikaisen signaalin suurin taajuus on 300Hz. Se pystytään rekonstruoimaan näytteidensä avulla jos näytteenottotaajuus on 500Hz.

   (e) FIR-suotimen siirtofunktio voidaan aina päätellä sen impulssivasteesta.

   (f) Desimoinnin yhteydessä tavattu $\boxed{\downarrow N}$-operaatio lisää $N-1$ nollaa jokaisen kahden peräkkäisen näytteen väliin.

2. (a) Analoginen signaali sisältää taajuuksia kahdeksaan kilohertsiin asti. Mikä näytteenottotaajuuden tulee vähintään olla? (2p)

   (b) Viidensadan Hertsin taajuudella värähtelevästä sinisignaalista otetaan näytteitä 1,25 millisekunnin välein (eli 0,00125 s välein). Millä taajuudella signaali näyttää värähtelevän näytteistyksen jälkeen (eli mille taajuudelle kyseinen taajuus laskostuu)? (2p)

   (c) Laske vektorin

   $$\mathbf{x} = [2, 3, -2, 0]^T$$

   diskreetti Fourier-muunnos. (2p)

3. Oletetaan, että kausaalisen LTI-järjestelmän heräte $x(n)$ ja vaste $y(n)$ toteuttavat seuraavan differenssiyhtälön:

   $$y(n) = y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) - \frac{3}{2}x(n-1) + \frac{1}{2}x(n-2).$$

   (a) Määritä järjestelmän siirtofunktio $H(z)$.

   (b) Piirrä napa-nollakuvio.

   (c) Onko järjestelmä stabiili? Miksi / miksi ei?

4. Signaalin näytteenottotaajuus on 32000 Hz ja se halutaan tallentaa laitteelle, joka käyttää 40000 Hz:n näytteenottotaajuutta. Muunnoksen aikana halutaan säilyttää taajuuskaista 0-12 kHz mahdollisimman alkuperäisenä (mutta 12-16 kHz saa vaimentua).

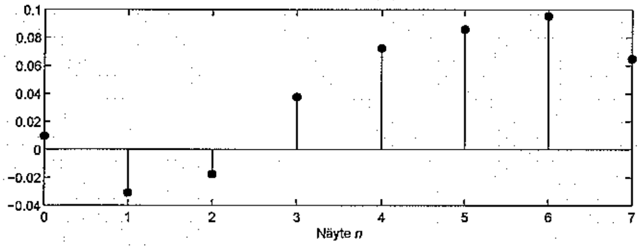
$\frac{32}{4} = \frac{16}{2} = 8$

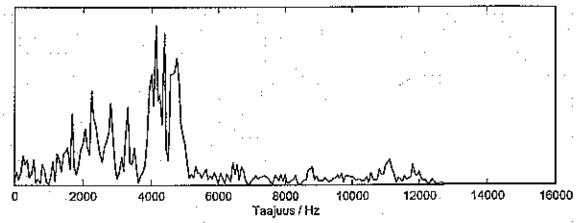
(a) Piirrä lohkokaavio järjestelmästä, joka suorittaa muunnoksen. (1p)

(b) Piirrä lohkokaavio järjestelmästä, joka suorittaa muunnoksen useassa vaiheessa mahdollisimman pienillä muunnoskertoimilla. (1p)

(c) Piirrä a-kohdassa tarvittavien suodinten amplitudivasteet riittävällä tarkkuudella, että rajataajuudet tulevat ilmi. Laita myös Nyquistin rajataajuus (tai puolikas, jos käytät normalisoituja taajuuksia) näkyviin. (2p)

(d) Piirrä esimerkkikuvat käsiteltävästä signaalista a-kohdan muunnoksen eri vaiheissa aika- ja taajuustasossa, kun järjestelmän heräte on alla olevien kuvien mukainen. Kiinnitä huomiota piirrostesi selkeyteen. Merkitse piirtämiisi taajuustason kuvaajiin Hertsiasteikko näkyviin (myös Nyquistin rajataajuus). (2p)



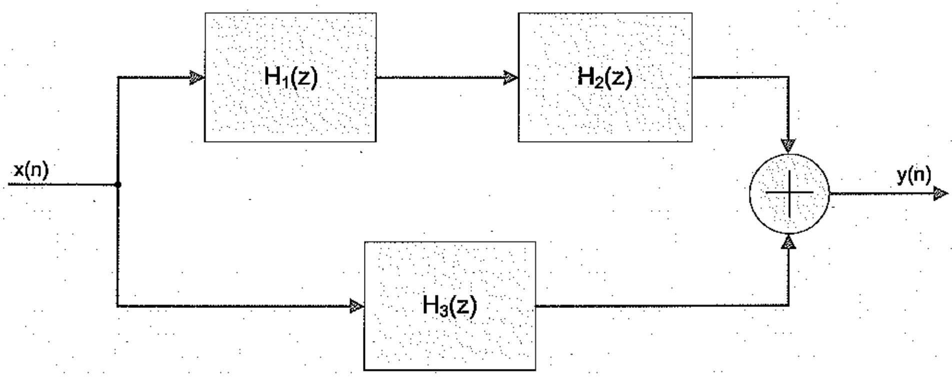


Kuva 1. D-kohdan signaalin aikatason (vas.) ja taajuustason (oik.) kuvaajat.

5. Tarkastellaan alla olevan kuvan mukaista kolmesta lohkosta koostuvaa järjestelmää. Lohkojen siirtofunktiot ovat

$$H_1(z) = 1 + 3z^{-2}$$
$$H_2(z) = \frac{1}{2} - 2z^{-1}$$
$$H_3(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}.$$

Mikä on kokonaisuuden $(x(n) \to y(n))$ siirtofunktio?



Joitakin aiheeseen ehkä liittyviä Wikipedia-sivuja

Suppose two classes of observations have means $\vec{\mu}_{y=0}, \vec{\mu}_{y=1}$ and covariances $\Sigma_{y=0}, \Sigma_{y=1}$. Then the linear combination of features $\vec{w} \cdot \vec{x}$ will have means $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=i}$ and variances $\vec{w}^T \Sigma_{y=i} \vec{w}$ for $i = 0,1$. Fisher defined the separation between these two distributions to be the ratio of the variance between the classes to the variance within the classes:

$$S = \frac{\sigma_{between}^2}{\sigma_{within}^2} = \frac{(\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=1} - \vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=0})^2}{\vec{w}^T \Sigma_{y=1} \vec{w} + \vec{w}^T \Sigma_{y=0} \vec{w}} = \frac{(\vec{w} \cdot (\vec{\mu}_{y=1} - \vec{\mu}_{y=0}))^2}{\vec{w}^T (\Sigma_{y=0} + \Sigma_{y=1}) \vec{w}}$$

This measure is, in some sense, a measure of the signal-to-noise ratio for the class labelling. It can be shown that the maximum separation occurs when

$$\vec{w} = (\Sigma_{y=0} + \Sigma_{y=1})^{-1} (\vec{\mu}_{y=1} - \vec{\mu}_{y=0})$$

When the assumptions of LDA are satisfied, the above equation is equivalent to LDA.

Be sure to note that the vector $\vec{w}$ is the normal to the discriminant hyperplane. As an example, in a two dimensional problem, the line that best divides the two groups is perpendicular to $\vec{w}$.

Generally, the data points to be discriminated are projected onto $\vec{w}$; then the threshold that best separates the data is chosen from analysis of the one-dimensional distribution. There is no general rule for the threshold. However, if projections of points from both classes exhibit approximately the same distributions, the good choice would be hyperplane in the middle between projections of the two means, $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=0}$ and $\vec{w} \cdot \vec{\mu}_{y=1}$. In this case the parameter c in threshold condition $\vec{w} \cdot \vec{x} < c$ can be found explicitly:

$$c = \vec{w} \cdot (\vec{\mu}_{y=0} + \vec{\mu}_{y=1})/2$$

A more condensed form of the difference equation is:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{i=0}^{P} b_i x[n-i] - \sum_{j=1}^{Q} a_j y[n-j] \right)$$

which, when rearranged, becomes:

$$\sum_{j=0}^{Q} a_j y[n-j] = \sum_{i=0}^{P} b_i x[n-i]$$

To find the transfer function of the filter, we first take the Z-transform of each side of the above equation, where we use the time-shift property to obtain:

$$\sum_{j=0}^{Q} a_j z^{-j} Y(z) = \sum_{i=0}^{P} b_i z^{-i} X(z)$$

We define the transfer function to be:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{P} b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{Q} a_j z^{-j}}$$

Considering that in most IIR filter designs coefficient a_0 is 1, the IIR filter transfer function takes the more traditional form:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{P} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^{Q} a_j z^{-j}}$$

Inversion of 2×2 matrices [edit]

The *cofactor equation* listed above yields the following result for 2×2 matrices. Inversion of these matrices can be done easily as follows:[2]

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Techniques [edit]

Practical approaches to sample-rate conversion include: converting to analog then re-sampling at the new rate, or calculating the values of the new samples directly from the old samples. The latter approach is generally preferred since it introduces less noise and distortion;[3] two possible implementation methods are as follows:

1. If the ratio of the two sample-rates is (or can be approximated by)[nb 1] a fixed, rational number L/M: generate an intermediate signal by inserting L−1 0s between each of the original samples. Low-pass filter this signal at half of the lower of the two rates. Select every M^th sample from the filtered output, to obtain the result.[4]
2. Treat the samples as geometric points and create any needed new points by interpolation. Choosing an interpolation method is a trade-off between implementation complexity and conversion quality (according to application requirements). Commonly used are: ZOH (for film/video frames), cubic (for image processing) and windowed sinc function (for audio).