

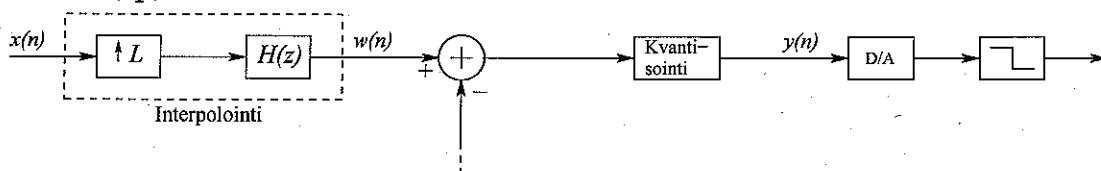
SGN-11000 Signaalinkäsittelyn perusteet
 Välikoe 28.5.2015
 Heikki Huttunen

Oma laskin on sallittu. Tenttikysymyksiä ei tarvitse palauttaa.

Sivuilla 1-3 on VÄLIKOE. Sivulla 4-5 on TENTTI. Sivulla 6 on kaavakokoelma. Vastaa vain jompaan kumpaan kokeeseen, ei molempiin eikä sekaisin. Vastaa konseptille, ja kirjoita ensimmäiselle sivulle ylös isolla sana VÄLIKOE tai TENTTI. Jos olet suorittanut pakolliset harjoitukset aikaisemmin kuin tänä vuonna, merkitse paperin alkuun milloin (kevät/kesä/syksy/vuosi)

1. Ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia? Ei perusteluja, pelkkä tosi / epätosi. Oikea vastaus 1p, väärä vastaus $-\frac{1}{2}$ p, ei vastausta 0p.
 - (a) Logistinen regressio on kohinanmuokkauksen suunnittelussa käytetty algoritmi.
 - (b) FIR-alipäästösuodin toteutetaan laitteessa, jonka näytteenottotaajuus on 10 kHz. Tällöin laite poistaa taajuuden 2 kHz mutta ei taajuutta 1 kHz. Kun laitteen näytteenottotaajuus pudotetaan puoleen suodinta muuttamatta, molemmat taajuudet poistuvat.
 - (c) Kaksiulotteinen diskreetti Fourier-muunnos voidaan laskea yksiulotteisten diskreettien Fourier-muunnosten avulla.
 - (d) Bilineaarimuunnosta käytetään IIR-suodinten suunnittelussa.
 - (e) Näytteenottotaajuus muunnetaan 1,5-kertaiseksi desimoimalla se ensin puoleen ja interpoloimalla sen jälkeen kolminkertaiseksi.
 - (f) Desimoinnin yhteydessä tavattu $\downarrow N$ -operaatio lisää $N - 1$ nollaa jokaisen kahden peräkkäisen näytteen väliin.

2. (a) Puhesignaali tallennetaan digitaalisesti näytteenottotaajuudella 44.1 kHz. Samassa tilassa on auki oleva putkitelevisio, josta on ääni pois päältä. Jälkeenpäin havaitaan, että televisiosta tuli mukaan häiriösignaali taajuudella 15625 Hz (televisio piirtää 625 juovaa 25 kertaa sekunnissa ja $625 \cdot 25 = 15625$). Myöhempää käyttöä varten riittää, että puhesignaalissa on jäljellä taajuudet 0 kHz–10 kHz. Millaiset päästö- ja estokais-tat tarvitaan, jotta häiriö poistuu ja puhesignaali säilyy? Mikä on **pienin** mahdollinen kerrointen määrä, jolla annetut vaatimukset saadaan täytettyä, kun suodinsuunnitelu tapahtuu ikkunamenetelmällä Hamming-ikkunaa käyttäen? (3p)
- (b) Täydennä oheisen lohkokkaavio niin, että se esittää *ensimmäisen asteen* kohinanmuokkainta. (3p)



3. Suunnittele ikkunamenetelmällä alipäästösuodin (selvitä käsin impulssivasteen lauseke), jonka vaatimukset ovat seuraavat:

Estokaista	[12.5 kHz, 16 kHz]
Päästökaista	[0 kHz, 11.5 kHz]
Päästökaistan maksimivärähtely	0.06 dB
Estokaistan minimivaimennus	48 dB
Näytteenottotaajuus	32 kHz

Käytä viimeisen sivun taulukoita hyväksesi.

4. Signaalin näytteenottotaajuus on 48000 Hz ja se halutaan tallentaa laitteelle, jonka näytteenottotaajuus on 6000 Hz. Signaalin olennaisin informaatio on taajuuskaistalla 0—2500 Hz, joka tulee säilyttää sellaisenaan ilman vaimennusta. Desimointi halutaan toteuttaa mahdollisimman tehokkaasti, joten kaikki usean vaiheen toteutukset on tutkittava.
- (a) Piirrä mahdollisten toteutusten lohkokkaaviot. (2p)
- (b) Suotimet suunnitellaan Hamming-ikkunalla, jolloin $N = 3.3/\Delta f$. Laske kerrointen yhteismäärät eri toteutuksissa. (2p)
- (c) Laske montako kertolaskua sekunnissa eri toteutukset tarvitsevat. Mikä on tehokkain toteutus? (2p)
5. (a) Suunniteltaessa lineaarista luokittelijaa kaksiulotteiselle datalle (ks. kuva alla) saadaan opetusdatasta kahden luokan kovarianssimatriiseiksi ja keskiarvoiksi seuraavat:

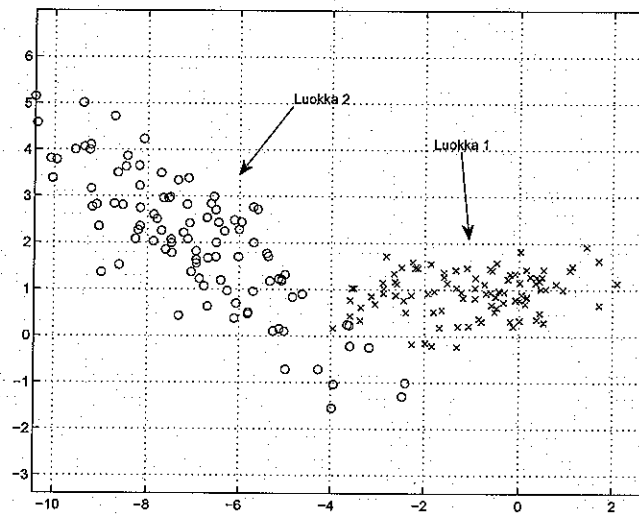
$$\text{cov}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \text{cov}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Laske projektiosuoran määräävä vektori w . (3p)

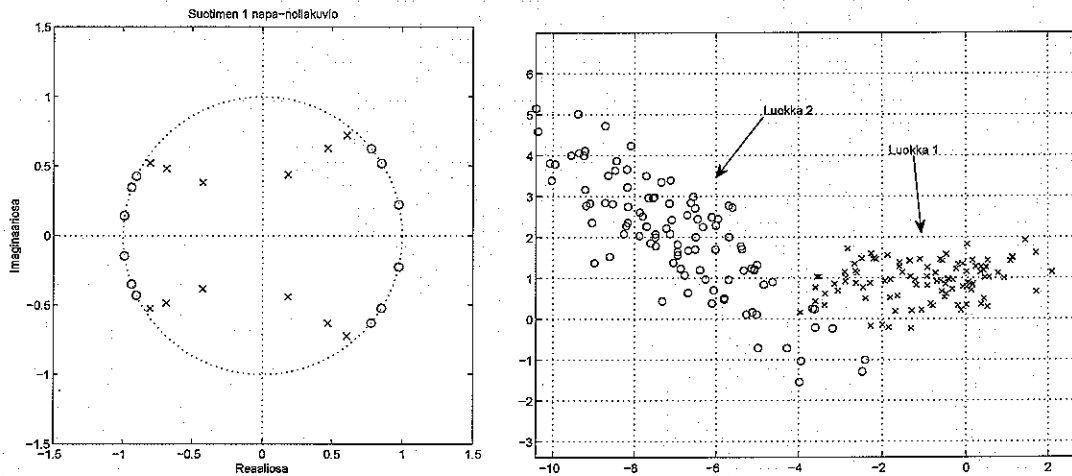
- (b) Projektiosuoran lisäksi tarvitaan kynnyisarvo c , joka kumpaan luokkaan näyte kuuluu. Helpoin tapa valita c on projisoida luokkien massakeskipisteet vektorille w ja ottaa niiden keskiarvo. Laske c . (2p)

(c) Kuuluuko näyte $x = (-3, 1)^T$ luokkaan 1 vai 2? (1p)



SGN-11000 Signaalinkäsittelyn perusteet
Tentti 28.5.2015
Heikki Huttunen

1. Ovatko seuraavat väittämät tosia vai epätosia? (Perusteluja ei tarvita. Oikea vastaus: 1 p, väärä: $-\frac{1}{2}$ p, ei vastausta 0 p.) Pistemäärä pyöristetään ylöspäin lähimpään kokonaislukuun.
- Suotimen stabiilius tarkistetaan selvittämällä ovatko sen siirtofunktion nollien itseisarvot pienempiä kuin yksi.
 - Epästabiilin LTI-järjestelmän impulssivasteessa on äärellinen määrä nolosta poikkeavia arvoja.
 - Laskostuminen estetään A/D-muunnoksessa asettamalla näytteenottotaajuus vähintään samaksi kuin analogisen signaalin suurin taajuus.
 - FIR-suotimen siirtofunktio voidaan aina päätellä sen impulssivasteesta.
 - Signaalin $x(n)y(n)$ DFT on $X(n)Y(n)$.
 - Järjestelmä, jonka impulssivaste on $h(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-1) - 0.25\delta(n-3)$ on stabiili.
2. (a) Laske vektorin $\mathbf{x} = [2, -1, -2, 0]^T$ diskreetti Fourier-muunnos. (2p)
- (b) Erään suotimen napanollakuvio on kuvassa 1, ja sen amplitudivaste $|H(e^{i\omega})| \in [0, 1]$. Piirrä suotimen amplitudivasteen kuvaaja niin tarkasti kuin se näillä tiedoilla onnistuu. (2p)
- (c) Eräs lääketieteen sovellus mittaa potilaan aivosähkökäyrää, johon on sekoittunut sähköverkosta tulevaa häiriötä 50 Hertzin taajuudella. Sovellutuksen kannalta olennainen informaatio sijaitsee taajuusalueella 0–34 Hz. Järjestelmän näytteenottotaajuus on 150 Hz. Millaiset päästö- ja estokaistat tarvitaan, jotta verkkohurina poistuu ja varsinainen signaali säilyy? Mikä on pienin mahdollinen kertoimien määrä, kun suodinsuunnittelu tapahtuu ikkunamenetelmällä Hamming-ikkunaa käyttäen. (2p)



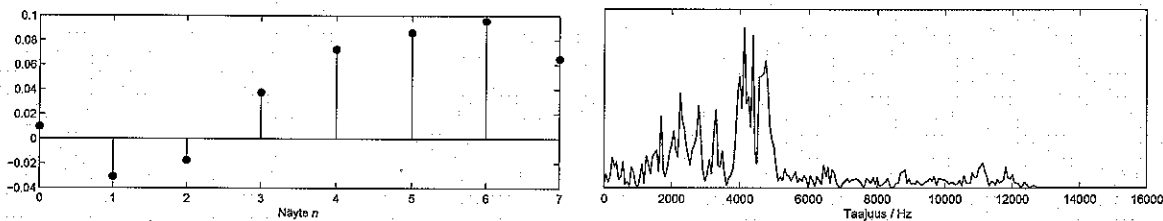
Kuva 1: Vasen: Tehtävän 2b suotimen napa-nollakuvio. Oikea: Tehtävän 5 data.

3. Oletetaan, että kausaalisen LTI-järjestelmän heräte $x(n)$ ja vaste $y(n)$ toteuttavat seuraavan differenssiyhtälön:

$$y(n) = -y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) - 2x(n-1) + x(n-2).$$

- (a) Määritä järjestelmän siirtofunktio $H(z)$.
 (b) Piirrä napa-nollakuvio.
 (c) Onko järjestelmä stabiili? Miksi / miksi ei?
4. Signaalin näytteenottotaajuus on 32000 Hz ja se on suodatettu siten, että taajuuskaista 13000 Hz – 16000 Hz on poistunut. Signaali halutaan tallentaa laitteelle, joka käyttää 40000 Hz:n näytteenottotaajuutta.

- (a) Piirrä lohkokaaavio järjestelmästä, joka suorittaa muunnoksen. (2p)
 (b) Piirrä a-kohdassa tarvittavien suodinten amplitudivasteet riittävällä tarkkuudella, että rajataajuudet tulevat ilmi. Laita myös Nyquistin rajataajuus (tai puolikas, jos käytät normalisoituja taajuuksia) näkyviin. (2p)
 (c) Piirrä esimerkkikuvat käsiteltävästä signaalista a-kohdan muunnoksen eri vaiheissa aika- ja taajuustasossa, kun järjestelmän heräte on kuvan 2 mukainen. Kiinnitä huomiota piirrostesesi selkeyteen. Merkitse piirtämiisi taajuustason kuvaajiin Hertsiasteikko näkyviin (myös Nyquistin rajataajuus). (2p)



Kuva 2: Tehtävän 4 signaalin aikatason (vas.) ja taajuustason (oik.) kuvaajat.

5. (a) Suunniteltaessa lineaarista luokittelijaa kaksiulotteiselle datalle (ks. kuva 1) saadaan opetusdatasta kahden luokan kovarianssimatriiseiksi ja keskiarvoiksi seuraavat:

$$\text{cov}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \text{cov}_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Laske projektiosuoran määräävä vektori w . (3p)
 (b) Projektiosuoran lisäksi tarvitaan kynnyisarvo c , joka kumpaan luokkaan näyte kuuluu. Helpoin tapa valita c on projisoida luokkien massakeskipisteet vektorille w ja ottaa niiden keskiarvo. Laske c . (2p)
 (c) Kuuluuko näyte $x = (-3, 1)^T$ luokkaan 1 vai 2? (1p)

Joitakin aiheeseen ehkä liittyviä Wikipedia-sivuja

Suppose two classes of observations have means $\bar{\mu}_{y=0}, \bar{\mu}_{y=1}$ and covariances $\Sigma_{y=0}, \Sigma_{y=1}$. Then the linear combination of features $\bar{w} \cdot \bar{x}$ will have means $\bar{w} \cdot \bar{\mu}_{y=i}$ and variances $\bar{w}^T \Sigma_{y=i} \bar{w}$ for $i=0,1$.

Fisher defined the separation between these two distributions to be the ratio of the variance between the classes to the variance within the classes:

$$S = \frac{\sigma_{between}^2}{\sigma_{within}^2} = \frac{(\bar{w} \cdot \bar{\mu}_{y=1} - \bar{w} \cdot \bar{\mu}_{y=0})^2}{\bar{w}^T \Sigma_{y=1} \bar{w} + \bar{w}^T \Sigma_{y=0} \bar{w}} = \frac{(\bar{w} \cdot (\bar{\mu}_{y=1} - \bar{\mu}_{y=0}))^2}{\bar{w}^T (\Sigma_{y=0} + \Sigma_{y=1}) \bar{w}}$$

This measure is, in some sense, a measure of the signal-to-noise ratio for the class labelling. It can be shown that the maximum separation occurs when

$$\bar{w} = (\Sigma_{y=0} + \Sigma_{y=1})^{-1} (\bar{\mu}_{y=1} - \bar{\mu}_{y=0})$$

When the assumptions of LDA are satisfied, the above equation is equivalent to LDA.

Be sure to note that the vector \bar{w} is the normal to the discriminant hyperplane. As an example, in a two dimensional problem, the line that best divides the two groups is perpendicular to \bar{w} .

Generally, the data points to be discriminated are projected onto \bar{w} ; then the threshold that best separates the data is chosen from analysis of the one-dimensional distribution. There is no general rule for the threshold. However, if projections of points from both classes exhibit approximately the same distributions, the good choice would be hyperplane in the middle between projections of the two means, $\bar{w} \cdot \bar{\mu}_{y=0}$ and $\bar{w} \cdot \bar{\mu}_{y=1}$. In this case the parameter c in threshold condition $\bar{w} \cdot \bar{x} < c$ can be found explicitly:

$$c = \bar{w} \cdot (\bar{\mu}_{y=0} + \bar{\mu}_{y=1})/2$$

A more condensed form of the difference equation is:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left(\sum_{i=0}^P b_i x[n-i] - \sum_{j=1}^Q a_j y[n-j] \right)$$

which, when rearranged, becomes:

$$\sum_{j=0}^Q a_j y[n-j] = \sum_{i=0}^P b_i x[n-i]$$

To find the transfer function of the filter, we first take the Z-transform of each side of the above equation, where we use the time-shift property to obtain:

$$\sum_{j=0}^Q a_j z^{-j} Y(z) = \sum_{i=0}^P b_i z^{-i} X(z)$$

We define the transfer function to be:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^P b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^Q a_j z^{-j}}$$

Considering that in most IIR filter designs coefficient a_0 is 1, the IIR filter transfer function takes the more traditional form:

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^P b_i z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^Q a_j z^{-j}}$$

Inversion of 2x2 matrices

[edit]

The cofactor equation listed above yields the following result for 2x2 matrices. Inversion of these matrices can be done easily as follows:^[2]

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Suodintyyppi	Impulssivaste kun	
	$n \neq 0$	$n = 0$
Alipäästö	$2f_c \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_c)$	$2f_c$
Ylipäästö	$-2f_c \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_c)$	$1 - 2f_c$
Kaistanpäästö	$2f_2 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_2) - 2f_1 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_1)$	$2(f_2 - f_1)$
Kaistanesto	$2f_1 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_1) - 2f_2 \text{sinc}(n \cdot 2\pi f_2)$	$1 - 2(f_2 - f_1)$

Ikkuna-funktion nimi	Siirtymäkaistan leveys (normalisoitu)	Päästökaistan värähtely (dB)	Estokaistan minimi-vaimennus (dB)	Ikkunan lauseke $w(n)$, kun $ n \leq (N-1)/2$
Suorakulmainen	0.9/N	0.7416	21	1
Bartlett	3.05/N	0.4752	25	$1 - \frac{2 n }{N-1}$
Hanning	3.1/N	0.0546	44	$0.5 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	3.3/N	0.0194	53	$0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	5.5/N	0.0017	74	$0.42 + 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right)$