Tentti(1) MAT-02650 Algoritmimatematiikka
18.5. 2015 Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta. HUOM. Tehtävät EIVÄT ole vaikeusjärjestyksessä!

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi.

Ratkaise **tehtävät 1 ja 2 omalle** paperilleen ja **tehtävät 3 ja 4 omalle** paperilleen.

Muistathan antaa palautetta Kaiku-järjestelmän kautta saadaksesi opintosuorituksen.

1. (a) (3 pistettä) Olkoot $R \subseteq A \times B$ ja $S, T \subseteq B \times C$. Osoita, että yhdistetylle binäärirelaatiolle pätee
$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T).$$
   (b) (3 pistettä) Osoita määritelmän nojalla, että $\log_2(n^2 - n) = \Omega(\log_2(n))$.

2. Vastaa lyhyesti (**kyllä/ei**) kohtien (a)-(f) kysymyksiin. Jokaisen kohdan **oikeasta vastauksesta saat yhden pisteen, väärästä vastauksesta vähennetään yksi piste** ja vastaamatta jättäminen on nolla pistettä. Tehtävän kokonaispistemäärä ei kuitenkaan mene negatiiviseksi. Tarkastellaan relaatiota
$$f : \mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{N},\ f(n) = 2n - 1$$
   (a) Onko relaatio f ekvivalenssirelaatio?
   (b) Onko relaatio f transitiivinen?
   (c) Onko relaatio f symmetrinen?
   (d) Onko relaatio f funktio?
   (e) Onko relaatio f injektio?
   (f) Onko relaatio f surjektio?

3. Osoita tautologioita ja päättelysääntöjä käyttäen (ilman totuustaulua), että
$$\Big((A \vee B \vee C) \wedge (C \to A) \wedge (B \to (A \vee C)) \Big) \to A$$
on pätevä teoria.

4. (a) (2 pistettä) Osoita, että $\overline{A \cap (B \cup \overline{A})} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
   (b) (2 pistettä) Lausu predikaattilogiikkaa ja kvanttoreita käyttäen: Kaikille kokonaisluvuille löytyy kokonaisluku siten, että näiden lukujen summa on 100.
   (c) (2 pistettä) Osoita, että kvanttorein suljettu lause
$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y \neq 1$$
   on epätosi.

KAAVOJA ON PAPERIN TOISELLA PUOLELLA.

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio	Ekvivalenssi
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$	$p \to \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$
	$p \vee \mathbf{e} = p$	$p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \to \mathbf{e} = \neg p$	
	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$	$\mathbf{t} \to p = p$	
	$p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \to p = \mathbf{t}$	
			$p \to p = \mathbf{t}$	
			$p \to q = \neg p \vee q$	
			$p \to q = \neg q \to \neg p$	

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$

Inferenssisääntöjä

MP $\dfrac{A,\ A \to B}{\therefore B}$	**MT** $\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	**Conj** $\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$	**Simp** $\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	**DS** $\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$	**HS** $\dfrac{A \to B,\ B \to C}{\therefore A \to C}$	

muista rajoitukset

UI $\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	**UG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	**EG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	**EI** $\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \to B(x)) = \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \to A(x)) = C \to \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \to A(x)) = C \to \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \to C) = \exists x\, A(x) \to C$	$\exists x\, (A(x) \to C) = \forall x\, A(x) \to C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	$\forall x\, (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$
$\exists y\, \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x,y)$	