

NB This is a closed-book exam, no material is allowed. Nonprogrammable calculators are allowed.

1. In a recent graph theory textbook an exercise problem claims that whenever a simple graph G has n vertices and k components, any two vertices u and v will satisfy

$$d(u) + d(v) \leq n - k = \rho(G).$$

- a) Show by counter examples that, in fact, if $n > k$ then there always exist a simple graph with n vertices and k components, and its two vertices u and v such that

$$d(u) + d(v) > n - k.$$

- b) What then was meant? Maybe the fact that, for any such a graph G and any two vertices u and v , the inequality

$$\frac{d(u) + d(v)}{2} \leq n - k$$

holds true. Show this.

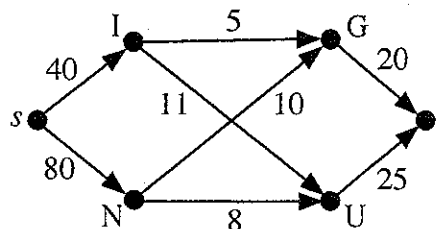
- c) Or possibly the fact that the original inequality $d(u) + d(v) \leq n - k$ does hold true if the two vertices u and v are disconnected. Show this, too.

2. Explain briefly what is **a)** the cut matrix, **b)** the circuit matrix, **c)** the fundamental cut matrix and **d)** the fundamental circuit matrix of a digraph, and how they are related.

3. What is the function of the algorithms of Warshall, Dijkstra and Floyd, and how do these algorithms differ from each other.

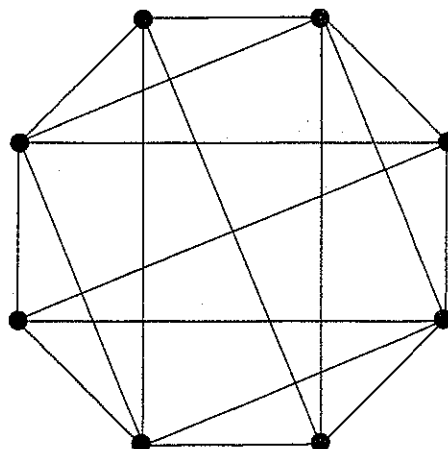
4. Norway (N) and Iceland (I) both export cod to Germany (G) and to USA (U). Weekly total supply and demand are given in the table on the right (the unit is 100 metric tons). Including weekly shipping capacities we get the transport network on the right.

| | |
|---|----|
| N | 80 |
| I | 40 |
| G | 20 |
| U | 25 |



Find a maximum flow using the Ford–Fulkerson Algorithm. Explain carefully each step of the algorithm. An extra point is given if you do this using at least once a back arc!

5. a) Demoucron's Algorithm, how it works and what is its function.
 b) Apply Demoucron's Algorithm to the nicely symmetric graph on the right. Explain carefully each step you take!



Huom! Mukana ei saa olla kirjallisuutta, tietokoneita eikä taulukoita. Funktiolaskin on sallittu.

1. Eräässä uudehkossa graafiteorian oppikirjassa väitetään harjoitustehtävänä, että jos yksinkertaisessa graafissa G on n pistettä ja k komponenttia, niin aina graafin kahdelle pisteelle u ja v

$$d(u) + d(v) \leq n - k = \rho(G).$$

- a) Näytä vastaesimerkeillä sen sijaan, että jos $n > k$, niin aina löytyy yksinkertainen n -pisteinen k -komponenttinen graafi ja sen pisteet u ja v , joille

$$d(u) + d(v) > n - k.$$

- b) Mitä sitten tarkoitettiin? Ehkä sitä, että jokaiselle tällaiselle yksinkertaiselle graafille G ja sen kaikille pisteille u ja v pätee epäyhtälö

$$\frac{d(u) + d(v)}{2} \leq n - k.$$

Näytä tämä.

- c) Tai mahdollisesti sitä, että alkuperäinen epäyhtälö $d(u) + d(v) \leq n - k$ pätee kyllä, jos pisteet u ja v eivät ole yhdistetyt. Näytä tämäkin.

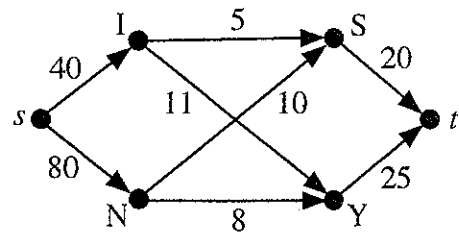
2. Selosta lyhyesti mitä ovat digraafin **a)** irrotusmatriisi, **b)** piirimatriisi, **c)** perusirrotusmatriisi ja **d)** peruspiirimatriisi, ja miten ne liittyvät toisiinsa.

3. Mitä tekevät ja miten eroavat toisistaan Warshallin, Dijkstran ja Floydin algoritmit?

4. Norja (N) ja Islanti (I) vievät molemmat turskaa Saksaan (S) sekä Yhdysvaltoihin (Y). Viikottaiset kokonaiskapasiteetit ja -tarpeet ovat oheisessa taulukossa (jossa yksikkö on 100 tonnia).

| | |
|---|----|
| N | 80 |
| I | 40 |
| S | 20 |
| Y | 25 |

Ottaen vielä huomioon viikottaiset kuljetuskapasiteetit saadaan oheinen siirtoverkko.



Etsi sille maksimivirtaus Ford–Fulkerson-algoritmilla. Selosta tarkasti askeleet. Saat yhden lisäpisteen, jos käytät ainakin kerran takenevaa nuolta!

5. a) Demoucronin algoritmi, millainen se on ja mihin sillä pyritään.
 b) Sovella Demoucronin algoritmia oheiseen mukavan symmetriseen graafiin. Selosta tarkasti mitä teet!

