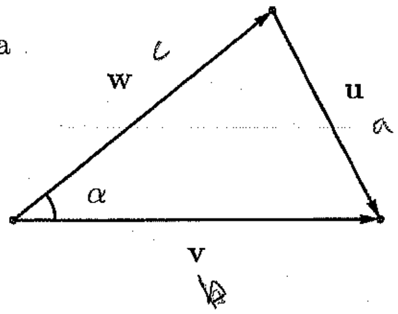
MAT-01220 Insinöörimatematiikka B2

Tentti 8.12.2014 / Kimmo Vattulainen

- Vastaa jokainen tehtävä eri konseptille.
- Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.
- Kääntöpuolella kaavakokoelma

---

1. **a)** Oheisessa kuvassa kolmion sivuja on merkitty vektoreina $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ sekä vektorien $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{w}$ välistä kulmaa luvulla α. Olkoon sivujen pituudet $\|\mathbf{u}\| = a$, $\|\mathbf{v}\| = b$, $\|\mathbf{w}\| = c$. Todista vektorilaskentaa käyttäen ns. kosinilause



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

b) Leikkaavatko suorat ja jos leikkaavat, niin missä pisteessä ?

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}6\\1\\6\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$$

2. a) 100 hengen matkaseurueella on 120 matkalaukkua. Heidän on tarkoitus vuokrata autoja, joissa on kuljetuskapasiteettia seuraavan taulukon mukaisesti

	henkilöitä	*laukkuja*	*hinta*
auto A	4	5	20
auto B	2	3	10
auto C	5	2	30

Etsi kaikki sellaiset autojen lukumäärien kombinaatiot, että jokainen auto tulee täyteen ihmisiä ja laukkuja. Muodosta lineaarinen yhtälöryhmä ja etsi sen ratkaisusta vastaus kysymykseen.
b) Esitä ja laske matriisitulon avulla, mikä a)-kohdan ratkaisuista on edullisin.

3. Etsi yksi sellainen $\mathbb{R}^3$:n ortonormaali kanta, jossa yksi vektoreista on vektorin $\mathbf{u}$ suuntainen. Esitä vektori $\mathbf{x}$ näiden vektorien lineaarikombinaationa.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

4. Olkoon matriisi A ja sen kaksi ominaisvektoria $\mathbf{v}_1$ ja $\mathbf{v}_2$ seuraavat

$$A = \begin{bmatrix}a & b & 10\\c & d & 0\\-5 & 15 & -8\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$$

missä vakiot $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ratkaise vakioiden a, b, c, d arvot. Mitkä ovat matriisin A ominaisarvot ja muut ominaisvektorit? Onko matriisi A diagonalisoituva? Jos on, niin mitkä ovat matriisit P ja D, jotka toteuttavat yhtälön $A = PDP^{-1}$. Matriisia P^{-1} ei tarvitse määrittää.

MAT-01220 Insinöörimatematiikka B2, kaavoja

1. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$

2. $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$

3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

4. $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right)\mathbf{u}$

5. $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$

6. $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$

7. $(AB)^T = B^T A^T,\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

8. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

9. $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

10. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},\ \det(A - \lambda I) = 0$

11. $S^{-1}AS = D \Leftrightarrow A = SDS^{-1}$

12. $A^T A\overline{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$