MAT-01400 Insinöörimatematiikka X 4 / Hirvonen
Tentti 08.09.2014
Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. Etsi funktion $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2y + 1$ suurin ja pienin arvo alueessa, jota rajaavat koordinaattiakselit ja yksikköympyrä siinä neljänneksessä, jossa $x \geq 0$ ja $y \geq 0$.

2. Olkoon $f(x,y) = \dfrac{x}{y} + e^x$, missä $x(t) = \ln t$ ja $y(t) = t^2$.

   (a) Laske derivaatta $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ ketjusäännöllä.

   (b) Laske derivaatta $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ ilman ketjusääntöä.

3. Tarkastellaan funktiota $f(x,y,z) = \ln(1 + x^2 + 3y^2 - z^2)$.

   (a) Laske funktion f suunnattu derivaatta pisteessä $(1,-1,1)$, kun lähdetään kohti pistettä $(3,1,0)$.
   Vihje: Suuntavektori ei ole $(3,1,0)$, sillä lähtöpiste ei ole origo.

   (b) Laske osittaisderivaatat $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ ja $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

4. Kappale S on leikattu umpinaisesta lieriöstä $x^2 + y^2 \leq 4$ pitkin tasoja $y + z = 1$ ja $z = 4$. Laske funktion $f(x,y,z) = y$ avaruusintegraali kappaleessa S.

Insinöörimatematiikka X 4, kaavakokoelma

1. $z = f(a,b) + \frac{\partial}{\partial x} f(a,b)(x-a) + \frac{\partial}{\partial y} f(a,b)(y-b)$

2. $T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})$

3. $F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{x}) & D_2 f_m(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$

4. $(F \circ G)'(\mathbf{a}) = F'(G(\mathbf{a}))\, G'(\mathbf{a})$

5. $D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\,\mathbf{e} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}$

6. $\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$

7. $\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}, \qquad \begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) + \mu \nabla h(\mathbf{x}) \end{cases}$

8. $H_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 D_1 f(\mathbf{x}) & D_1 D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_1 D_n f(\mathbf{x}) \\ D_2 D_1 f(\mathbf{x}) & D_2 D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_2 D_n f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(\mathbf{x}) & D_n D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_n D_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$

9. $\iint_R f(x,y)\, dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, drd\theta$

10. $\iiint_T f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_U f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta$

11. $m = \iiint_T \delta\, dV, \quad \overline{z} = \iiint_T z\delta\, dV, \quad I_z = \iiint_T (x^2+y^2)\, \delta\, dV$

12. $\iint_A f(x,y)\, dxdy = \iint_S f(F(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| drd\theta$

13. $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right)^{-1}$

14. $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos(2t)), \quad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos(2t))$

15. $\int f'(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)) + C$

$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$