Tentti(1) MAT-02650 Algoritmimatematiikka
22.5. 2014 Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi.

Ratkaise **tehtävät 1 ja 2 omalle** paperilleen ja **tehtävät 3 ja 4 omalle** paperilleen.

Kaavaliite on tehtäväpaperin toisella puolella

1. (a) (3 pistettä) Osoita joukko-opin laskusääntöjä käyttäen, että

$$\overline{\left(\overline{\overline{C} \cap A} \cap \overline{A \cap C}\right) \cup \left(\overline{B \cup \overline{C}} \cup \overline{C \cup B}\right)} = A \cap B.$$

   (b) (3 pistettä) Osoita määritelmän nojalla, että $n^3 - 2n^2 + 4n = \Omega(n^3)$.

2. Vastaa lyhyesti (**kyllä/ei**) kohtien (a)-(f) kysymyksiin. Jokaisen kohdan **oikeasta vastauksesta saat yhden pisteen, väärästä vastauksesta vähennetään yksi piste** ja vastaamatta jättäminen on nolla pistettä. Tehtävän kokonaispistemäärä ei kuitenkaan mene negatiiviseksi.

   Tarkastellaan joukkoa

$$A = \{\langle n, n^2 \rangle : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

   (a) Onko joukko A karteesinen tulo joukossa $\mathbb{Z}$?

   (b) Onko joukko A relaatio?

   (c) Onko joukko A ekvivalenssirelaatio?

   (d) Onko joukko A funktio?

   (e) Onko joukko A injektio?

   (f) Onko joukko A surjektio?

3. Osoita tautologioita ja päättelysääntöjä käyttäen (ilman totuustaulua), että

$$\Big((A \to (B \wedge C)) \wedge ((D \wedge C) \to \neg A) \wedge A\Big) \to \neg D$$

   on pätevä teoria.

4. (a) (2 pistettä) Osoita, että kvanttorein suljettu lause

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : \ln(x) \neq y$$

   on tosi tai epätosi.

   (b) (4 pistettä) Osoita tautologioita ja päättelysääntöjä käyttäen (ilman totuustaulua), että

$$(\forall x\, (p(x) \vee q(x)) \wedge \exists x\, \neg p(x)) \to \exists x\, q(x)$$

   on pätevä teoria.

KAAVOJA ON PAPERIN TOISELLA PUOLELLA.

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio	Ekvivalenssi
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \wedge \mathbf{t} = p$	$p \to \mathbf{t} = \mathbf{t}$	$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$
	$p \vee \mathbf{e} = p$	$p \wedge \mathbf{e} = \mathbf{e}$	$p \to \mathbf{e} = \neg p$	
	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$	$\mathbf{t} \to p = p$	
	$p \vee \neg p = \mathbf{t}$	$p \wedge \neg p = \mathbf{e}$	$\mathbf{e} \to p = \mathbf{t}$	
			$p \to p = \mathbf{t}$	
			$p \to q = \neg p \vee q$	
			$p \to q = \neg q \to \neg p$	

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \vee (p \wedge q) = p$
	$p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$
	$p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP	**MT**	**Conj**	**Simp**
$\dfrac{A,\ A \to B}{\therefore B}$	$\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	$\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$	$\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add	**DS**	**HS**	
$\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	$\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$	$\dfrac{A \to B,\ B \to C}{\therefore A \to C}$	

muista rajoitukset

UI	**UG**	**EG**	**EI**
$\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	$\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	$\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \to B(x)) = \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \to A(x)) = C \to \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \to A(x)) = C \to \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \to C) = \exists x\, A(x) \to C$	$\exists x\, (A(x) \to C) = \forall x\, A(x) \to C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	$\forall x\, (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$
$\exists y\, \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x,y)$	