



Ei laskinta eikä taulukkokirjoja.

1. Osoita, että funktio $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \sin(kx)$ toteuttaa lämmönjohtumisyhtälön

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

2. Suorakulmaisen särmiön muotoisen umpinaisen laatikon leveys, pituus ja korkeus riippuvat ajasta. Eräällä ajanhetkellä mitat ovat: leveys 2 m, pituus 1 m ja korkeus 2 m. Lisäksi tiedetään, että leveys ja pituus kasvavat 0,5 m/s ja korkeus vähenee 1,5 m/s. Laske laatikon pinta-alan muutosnopeus (m^2/s) kyseisenä ajanhetkenä.
3. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ käyrien $y = x^2$ ja $y = 2x$ rajaama rajoitettu joukko. Laske

$$\iint_A (4x + 2) dx dy$$

kummassakin integroimisjärjestyksessä.

4. a) Olkoon $T \subset \mathbb{R}^3$ (siisti) joukko. Mikä joukon T ominaisuus saadaan selville laskemalla integraali

$$\iiint_T 1 dx dy dz ? \quad (1 \text{ p.})$$

- b) Laske a -säteisen pallon tilavuus integroimalla (käyttämättä missään laskun vaiheessa tunnettua pallon tilavuuden kaavaa). (5 p.)



MAT-01340 Insinöörimatematiikka C 4
Tentin kaavaliite (periodi 4/2013–2014)

1. $f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + f'(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$

2.
$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases} \quad dx \, dy \, dz = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

3. $m = \iiint_T \rho \, dV, \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \iiint_T x \rho \, dV, \quad I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \rho \, dV$

4. $\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$

5. $(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = 0$