B	B	Tentti 2	IMA B3
B	B	28.4. 2014	MAT-01320 / Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kaavaliite on tehtäväpaperin toisella puolella

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi. Lisäksi jätä etusivulle ja marginaaleihin tilaa tarkastajan merkintöjä varten.

1. Laske epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty x^3 \mathrm{e}^{-x^2}\,dx,$$

kun tiedetään, että $\lim\limits_{a\to\infty} \frac{a^2}{\mathrm{e}^{a^2}} = 0.$

2. (a) Selvitä suppeneeko vai hajaantuuko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2}{2n^2-n+1}.$$

(b) Mikä on käyrän $f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ kaaren pituus välillä $[0,1]$

3. Muodosta funktiolle $x\cos(x)$ neljännen asteen Taylorin polynomi $P_4(x)$, jonka kehityskeskus on origo, ja jäännöstermi $R_4(x)$.

4. (a) Hyttyspopulaation $P = P(t)$ kasvu on suoraan verrannollinen populaation koon neliöjuureen. Tarkastelun alussa, eli hetkellä $t = 0$, hyttysiä on 1 miljoona. Kahden viikon kuluttua, hetkellä $t = 2$, hyttysiä on 9 miljoonaa. Muodosta separoituva differentiaaliyhtälö, joka kuvaa tilanetta ja ratkaise se. Tämän jälkeen selvitä, milloin hyttyspopulaation koko ylittää 25 miljoonaa.

(b) Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y''(x) - 2y'(x) - 35y(x) = 0, \qquad y(0) = 12,\ y'(0) = 0$$

KAAVOJA ON PAPERIN TOISELLA PUOLELLA.

B B Kaavoja Insinöörimatematiikka B3
B B MAT-01320 / Kaarakka

1.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$
$\cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh}(x) + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x) + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x) + C = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} + C$

2. $s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad A = 2\pi\int_a^b \lvert f(x)\rvert\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$

3. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

4. $R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left\lvert\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\rvert$

5.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad (x\in\mathbb{R})$$