

MAT-13540 Laaja matematiikka 4u

Tentti 2012-05-14

Ei kirjallisuutta, muistiinpanoja, taulukoita tai laskimia mukana!
Perustelee kaikki väitteesi!

1. a) Tarkastellaan joukkoa $T = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 \leq x_2\}$. Mitä seuraavista topologisista ominaisuuksista joukolla T on: avoin, suljettu, rajoitettu, kompakti?

b) Tutki, onko oheisella funktiolla $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ raja-arvoa $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$? Myönteisessä tapauksessa laske kyseinen raja-arvo.

$$f(x, y, z) = \frac{xy - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

2. a) Laske yhdistetyn kuvauksen $g \circ f$ derivaatta (Jacobin matriisi) pisteessä $(1,0)$, kun

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} x - 2y \\ x^2 + y^3 \\ y^4 \end{bmatrix}, \quad g(u, v, w) = \begin{bmatrix} u v + w^2 \\ u - v^2 \end{bmatrix}.$$

b) Tutki, määritteleekö yhtälö $x^2 y - 3xy^3 + y^2 = 9$ implisiittisesti funktion $y = g(x)$ pisteen $x = 0$ ympäristössä. Myönteisessä tapauksessa laske derivaatta $g'(0)$.

3. Hae ne pisteet, joissa funktio $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

4. Laske integraali $\iint_S xy \, da$, kun S on se (x, y) -tason joukko, jota rajoittavat suora $x - y = 1$ ja paraabeli $y^2 = 2x + 6$.

5. Mikä on kaarihallin Ω tilavuus, kun sitä rajoittavat \mathbb{R}^3 :ssa tasot $z = 0$, $x = 1$ ja $x = -1$ sekä parabolinen sylinteri $z = 1 - y^2$?