MAT-62756 Graph Theory Tentti 17.3.2014

Tentaattori: Keijo Ruohonen

Huom! Mukana ei saa olla kirjallisuutta, tietokoneita eikä taulukoita. Funktiolaskin on sallittu.

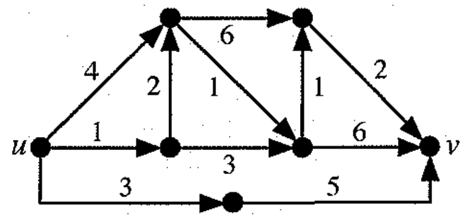
1. **a)** G on yhtenäinen yksinkertainen graafi ja v sen piste. Näytä, että G:llä on silloin sellainen virittävä puu T, että v:n aste G:ssä on sama kuin sen aste T:ssä.

b) G on yhtenäinen yksinkertainen graafi ja U sellainen G:n pisteiden joukko, että minkä tahansa kahden U:n pisteen etäisyys on ainakin 3. (Pisteiden etäisyys on lyhimmän niitä yhdistävän polun pituus G:ssä.) Näytä, että G:llä on silloin sellainen virittävä puu T, että kunkin U:n pisteen aste G:ssä on sama kuin sen aste T:ssä.

(Riittävän etäiset pisteet (ja mikä tahansa yksi piste) voidaan siis aina ottaa yksinkertaisen graafin virittävään puuhun täydellä asteella. Tämä on toisinaan tarpeenkin ja esimerkiksi Kruskalin 1. algoritmi voidaan helposti modifioida minimaalisten tällaisten virittävien puiden etsimiseen annetulle pistejoukolle.)

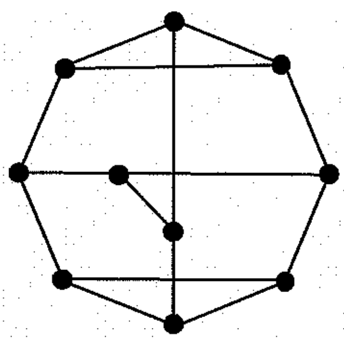
2. Kvasivahva yhtenäisyys, suunnatun graafin juuri ja suunnattu puu: Mitä ne ovat ja miten ne liittyvät toisiinsa.

3. Etsi oheisessa digraafissa kevyin polku pisteestä u pisteeseen v käyttäen Dijkstran algoritmia. Nuolien painot on kuvassa merkitty niiden viereen. Selosta tarkasti mitä teet!



4. **a)** Demoucronin algoritmi, millainen se on ja mihin sillä pyritään.

b) Sovella Demoucronin algoritmia oheiseen graafiin. Selosta tarkasti mitä teet!



5. Selosta lyhyesti mitä ovat **a)** graafin piirimatroidi, **b)** graafinen matroidi ja **c)** graafin irrotusmatroidi.

In English ⟶⟶⟶

MAT-62756 Graph Theory Examination 17.3.2014

Examiner: Keijo Ruohonen

NB This is a closed-book exam, no material is allowed. Nonprogrammable calculators are allowed.

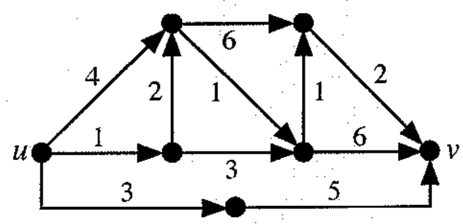
1. **a)** G is a connected simple graph and v its vertex. Show that then G has a spanning tree T such that the degree of v in G is the same as its degree in T.

b) G is a connected simple graph and U a set of vertices of G such that the distance of any two vertices in U is at least 3. (The distance of two vertices is the length of the shortest path connecting them in G.) Show that then G has a spanning tree T such that the degree of each vertex of U in G is the same as its degree in T.

(Thus sufficiently distant vertices (or any single vertex) can always be included in a spanning tree of a simple graph with their full degrees. This is sometimes useful, and e.g. Kruskal's 1st Algorithm is easily modified to find minimal spanning trees of this kind for a given set of vertices.)

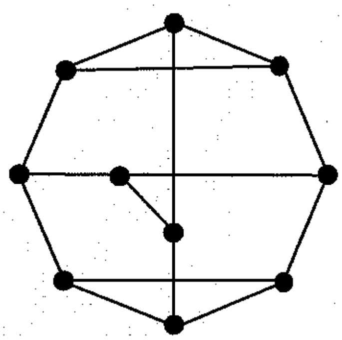
2. Quasi-strong connectivity, root of a directed graph, and a directed tree: What they are and how they are related.

3. Find the lightest path from u to v in the digraph on the right using Dijkstra's Algorithm. Arc weights are given in the picture. Explain carefully each step you take!



4. **a)** Demoucron's Algorithm, how it works and what is its function.

b) Apply Demoucron's Algorithm to the graph on the right. Explain carefully each step you take!



5. Explain briefly what is **a)** the circuit matroid of a graph, **b)** a graphic matroid, and **c)** the cut matroid (or bond matroid) of a graph.

Suomeksi ⟶⟶⟶