

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kaavaliite on tehtäväpaperin toisella puolella.

Valitse teetkö tentin eli tehtävät 1 - 4 vai toisen välikokeen eli tehtävät 3 ja 4. Kirjoita valintasi selkeästi vastauspaperisi alkuun. Huolehdi myös, että palautat vastauksesi oikeaan pinoon. Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi. Lisäksi jätä etusivulle ja marginaaleihin tilaa tarkastajan merkintöjä varten.

1. (a) Laske integraali

$$\int_1^2 \frac{3}{x(x+2)} dx$$

- (b) Integroi käyttäen sijoitusta $x = e^u$

$$\int \ln(x) dx$$

2. Selvitä integraalitestiiä käyttäen suppeneeko vai hajaantuuko sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^{\frac{3}{2}}}$$

3. Etsi potenssisarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(x-2)^n}{2n^2+n}$$

suppenemissäde ja suppenemisväli.

4. (a) Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$y'(x) + \frac{5}{x}y(x) = 7x, \quad y(2) = 5.$$

- (b) Etsi yleinen ratkaisu differentiaaliyhtälölle

$$y''(x) + 4y(x) = x^2.$$

1.

$f(x)$	$\int f(x) dx$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) + C$
$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$	$\ln \sin(x) + C$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh}(x) + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x) + C = \ln x + \sqrt{x^2-1} + C$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x) + C = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + C$

2. $s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2} dx, \quad A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+f'(x)^2} dx, \quad V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$

3. $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$

4. $R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

5.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (x \in \mathbb{R})$$