# B B 1. välikoe Insinöörimatematiikka B3
# B B 3.2. 2014 MAT-01320 / Kaarakka

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kaavaliite on tehtäväpaperin toisella puolella

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi. Lisäksi jätä etusivulle ja marginaaleihin tilaa tarkastajan merkintöjä varten.

1. (a) (3 pistettä) Käyrä $f(x) = \sqrt{x\sin(x)}$ pyörähtää $x$-akselin ympäri välillä $[0, \pi]$. Laske pyörähdyskappaleen tilavuus.

   (b) (3 pistettä) Laske sijoitusta $x = \sin(t)$ käyttäen integraalin $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ arvo.

2. (a) (3 pistettä) Laske integraali

$$\int \frac{2}{x(x^2+2)}dx.$$

   (b) (3 pistettä) Osoita integraalitestiä käyttäen, että sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ suppenee.

   Voit käyttää tietoa, että $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{\ln(a)}{a} = 0$

KAAVOJA ON PAPERIN TOISELLA PUOLELLA.

# B B Kaavoja Insinöörimatematiikka B3
## B B MAT-01320 / Kaarakka

1.

| $f(x)$ | $\int f(x)\,dx$ |
|---|---|
| $\tan(x)$ | $-\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$ |
| $\cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$ | $\ln\lvert\sin(x)\rvert + C$ |
| $\dfrac{1}{\cos^2(x)}$ | $\tan(x) + C$ |
| $\dfrac{1}{\sin^2(x)}$ | $-\cot(x) + C$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin(x) + C$ |
| $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\arctan(x) + C$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\operatorname{arsinh}(x) + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ | $\operatorname{arcosh}(x) + C = \ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$ |
| $\dfrac{1}{1-x^2}$ | $\operatorname{artanh}(x) + C = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1} + C$ |

2. $s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$

3. $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

4. $R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

5.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R})$$