

**B B Tentti Insinöörimatematiikka B1**  
**B B 20.1. 2014 MAT-01120 / Kaarakka**

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta.

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi. Lisäksi jätä etusivulle ja marginaaleihin tilaa tarkastajan merkintöjä varten.

1. (a) (2 pistettä) Laske  $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ .

(b) (2 pistettä) Laske  $\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{2}\right)$ .

(c) (2 pistettä) Sievennä  $(A \cup B) \cap \overline{A} \cap B$ .

2. (a) (3 pistettä) Laske raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 2}{\sin(x)}$ .

(b) (3 pistettä) Määritä  $c$  siten, että  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  on olemassa

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, & \text{kun } x < 1, \\ x^2 \ln\left(\frac{1}{e}\right) + x \ln\left(\frac{1}{e^c}\right), & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

3. (a) (2 pistettä) Kirjoita kvanttoreiden ja logiikan konnektiivien avulla seuraava Määritelmä:

Jokaiselle nolaa suuremmalle arvolle  $\varepsilon$  on olemassa nolaa suurempi arvo  $\delta$  siten, että kun muuttujan  $x$  ja arvon  $b$  välinen etäisyys on nolaa suurempi, mutta pienempi kuin  $\delta$ , niin funktion arvon  $f(x)$  ja arvon  $A$  välinen etäisyys on pienempi kuin  $\varepsilon$ .

(b) (4 pistettä) Osoita käänteisfunktion derivointisääntöä käyttäen, että kun  $x > 1$ , niin

$$D_x(\operatorname{arcosh}(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

4. (a) (3 pistettä) Kompleksiluvun  $z$  kolmannet juuret ovat  $\omega_0 = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{12}j}$ ,  $\omega_1 = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{12}j}$  ja  $\omega_2 = \sqrt{2}e^{\frac{11\pi}{12}j}$ . Esitä  $z$  muodossa  $x + yj$  (siis ei polaarimuodossa tai eksponenttifunktion avulla).

(b) (3 pistettä) Olkoon  $z = re^{\theta j}$ . Todista induktiolla de Moivre'n laki eli

$$z^n = r^n e^{n\theta j} \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Derivointikaavoja

| $f(x)$                    | $f'(x)$                   |
|---------------------------|---------------------------|
| $a^x$                     | $a^x \ln a$               |
| $\log_a x$                | $\frac{1}{x \ln a}$       |
| $\arcsin x$               | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  |
| $\arccos x$               | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan x$               | $\frac{1}{1+x^2}$         |
| $\operatorname{arsinh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  |
| $\operatorname{arcosh} x$ | $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$  |
| $\operatorname{artanh} x$ | $\frac{1}{1-x^2}$         |

$$2. \frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{\frac{d}{dy} f(y)} \quad (x = f(y) \Leftrightarrow y = f^{-1}(x))$$

$$3. \begin{aligned} \sin(\theta + \phi) &= \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \\ \cos(\theta + \phi) &= \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \end{aligned}$$

$$4. \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$5. e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$