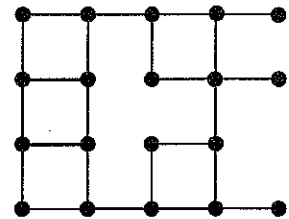


Huom! Mukana ei saa olla kirjallisuutta, tietokoneita eikä taulukoita. Funktiolaskin on sallittu.

1. a) Totea, että jokaiselle pisteluvulle $n > 1$ on n -pisteinen yhtenäinen graafi, jonka pisteiden asteet ovat kaikki erilaiset.
 b) Onko tämä mahdollista millekään pisteluvulle $n > 1$, jos vaaditaankin, että graafi on yksinkertainen vaan ei välttämättä yhtenäinen? Perustele vastauksesi!

2. Selosta lyhyesti mitä ovat digraafin a) vieruspistematriisi, b) insidenssimatriisi, c) irrotusmatriisi, d) piirimatriisi, e) perusirrotusmatriisi ja f) peruspiirimatriisi.

3. a) Unkarilainen algoritmi kaksijakoisille graafeille, millainen se on ja mihin sillä pyritään.
 b) Sovella Unkarilaista algoritmia oheiseen graafiin lähtien tyhjästä viivajoukosta. Kerro tarkasti mitä teet! (Graafi on kaksijakoinen.)



4. a) Anna esimerkki tapauksesta, jossa siirtoverkossa on sykli ja Ford–Fulkerson-algoritmi antaa kaikille syklin nuolille positiivisen virtauksen. Esitä myös algoritmin toiminta huolellisesti.
 b) Totea, että jos siirtoverkossa on syklejä, niin sillä on maksimivirtaus, jossa jokaisen syklin jossakin nuolessa on nollavirtaus.

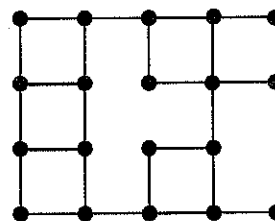
(Virtaus syklin ympäri voi jossakin tapauksessa olla tarpeenkin (esim. varastona), mutta yleensä se vain kuluttaa resursseja ja pitäisi poistaa. Algoritmisesti tämä on hankalahkoa.)

5. Davidson–Harel-algoritmi, mitä se tekee ja miten se toimii.

NB This is a closed-book exam, no material is allowed. Nonprogrammable calculators are allowed.

1. **a)** Show that for each number $n > 1$ there is a connected graph with n vertices all of them having different degrees.
b) Is this possible for any $n > 1$ if it is required that the graph is simple but not necessarily connected? Explain your reasoning!
2. Explain briefly what is **a)** the adjacency matrix, **b)** the incidence matrix, **c)** the cut matrix, **d)** the circuit matrix, **e)** the fundamental cut matrix and **f)** the fundamental circuit matrix of a digraph.

3. **a)** The Hungarian Algorithm for bipartite graphs, how it works and what is its function.
b) Apply the Hungarian Algorithm to the graph on the right starting from the empty edge set. Explain carefully each step you take! (The graph is bipartite.)



4. **a)** Give an example of a case where a transport network has a cycle and the Ford–Fulkerson Algorithm gives a positive flow for each arc of the cycle. Explain the steps of the algorithm in detail.
b) Show that if a transport network has cycles then there is a maximum flow such that in each cycle there is at least one arc with a zero flow.

(Flow around a cycle may in fact be useful in some situations (e.g. as a storage), but usually it just eats resources and should be removed. Algorithmically this is a bit tricky.)

5. The Davidson–Harel Algorithm, how it works and what is its function.