MAT-01220 Insinöörimatematiikka B2

Tentti 09.12.2013 / Kimmo Vattulainen

- **Vastaa tehtävät 1-2 yhdelle konseptille ja 3-4 toiselle konseptille.**
- **Ei laskimia, ei omaa kirjallista materiaalia.**
- **Kääntöpuolella kaavakokoelma**

---

1. **a)** Tason $\mathcal{P}$ kolme pistettä ovat $(1,1,1), (0,0,3), (-1,2,3)$.
Määritä tason $\mathcal{P}$ ja tason $2x+2y+z=1$ leikkaussuoran yhtälö vektorimuodossa.

b) Kahden toisiaan leikkaavan tason leikkaussuoran suuntavektori saadaan myös muodostamalla vektori, joka on kohtisuorassa molempien tasojen normaalien kanssa. Näytä, että tämä tulos pitää paikkansa **a)**-kohdassa laskemiesi tasojen ja niiden leikkaussuoran kohdalla.

2. Millä vakioiden $c,\ d \in \mathbb{R}$ arvoilla yhtälöryhmällä
a) on yksikäsitteinen ratkaisu? Esitä ratkaisu.
b) on äärettömän monta ratkaisua? Esitä ratkaisu.
c) ei ole lainkaan ratkaisua?

$$\begin{cases} x+2y+z &= 0 \\ x+y &= 0 \\ -y+cz &= d \end{cases}$$

3. Matriisi A on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & k \end{bmatrix}.$$

Millä vakion $k \in \mathbb{R}$ arvoilla

a) matriisin A sarakkeet ovat kaikki keskenään ortogonaalisia?
b) matriisilla A on käänteismatriisi? Mikä on tällöin $\det(A^{-1})$?
c) yhtälöryhmällä

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu ja ratkaisussa $y=-1$?

4. **a)** Määritä matriisin A ominaisarvot ja ominaisavaruudet.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

b) Määritä $B = A^{1/2}$. Etsi siis sellainen matriisi B, että $B^2 = A$. Käytä apunasi diagonalisoituvuutta.

MAT-01220 Insinöörimatematiikka B2, kaavoja

1. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$

2. $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$

3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

4. $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u}$

5. $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0$

6. $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$

7. $(AB)^T = B^T A^T,\ (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1},\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

8. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

9. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$

10. $A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x},\ \det(A - \lambda I) = 0$

11. $V^{-1} A V = D \Leftrightarrow A = V D V^{-1}$

12. $A^T A \overline{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$