MAT-01160 Matematiikka 1, Tentti 14.10.2013

Tentaattori: Simo Ali-Löytty

`Ohjeet: Ei laskimia, eikä muistiinpanoja.`
`Kaavakokoelma on paperin kääntöpuolella.`
`Kirjoita pääkonseptiin neljä`
`2×2-ruudun kokoista neliötä:`
`Jokainen tehtävä tehdään omalle sivulle / omille sivuille.`
`Kirjoita vastauksien perustelut ja välivaiheet näkyviin!`

1. (a) Laske raja-arvo $\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{3x^2 - 5x - 2}$

   (b) Derivoi funktio $f(x) = x^2 \cdot e^{\sin(x)}$

   (c) Hahmoittele (piirrä) mahdollisimman tarkasti minkälaisen kuvan Scilab/MatLab piirtää komennolla `x=1:4;plot(3*x-6,x,'k.-');`. Ilmoita kumman ohjelman mukaan piirrät kuvion.

?? 2. Ratkaise kaikki kompleksiluvut $z \in \mathbb{C}$, jotka toteuttavat yhtälön

$$z^4 + 8z = 0.$$

Esitä kaikki ratkaisut sekä muodossa

$$z = x + iy, \quad \text{että muodossa}$$
$$z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)), \quad ?$$

missä $x, y, r, \alpha \in \mathbb{R}$.

3. Osoita raja-arvon määritelmää käyttäen, että

$$\lim_{x \to 4} (x^2 - \sqrt{x}) = 14.$$

Toisin sanoen todista kyseinen raja-arvo $\varepsilon - \delta$-todistuksella.

4. (a) `(maks. 2 pistettä)` Osoita, että $-b + (a + b) = a$ kaikilla kunnan alkioilla a ja b. Käytä vain kunta-aksioomia. Muista perustella jokainen välivaihe täsmällisesti.

   (b) Olkoon $f(x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$ reaalifunktio. Derivoidaan funktiota $f(x)$ n kertaa, missä $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, näin saadaan funktio $f^{(n)}(x)$. Osoita, että

+ sin
− cos

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 2^n \cosh(2x), & \text{kun } n \text{ on pariton} \quad 2k+1 \\ 2^n \sinh(2x), & \text{kun } n \text{ on parillinen} \quad 2k \end{cases}$$

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO
Matematiikan laitos

MAT-01160 Matematiikka 1, kaavakokoelma 2013-2014

1. Derivointikaavoja

$f(x)$	a^x	$\log_a x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$	$\operatorname{ar\,sinh} x$	$\operatorname{ar\,cosh} x$	$\operatorname{ar\,tanh} x$
$f'(x)$	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{1}{1-x^2}$

2. $D_y f^{-1}(y) = \dfrac{1}{f'(x)} \qquad (y = f(x))$

3. $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha), \quad e^z = e^{z+n2\pi i}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

4. $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
   $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

5. $\lim_{x\to a} f(x) = L$ tarkoittaa, että $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$.

6. $e \approx 2.71828182$ ja $\pi \approx 3.14159265$ (lukuja ei ole pyöristetty)

Kunta-aksioomat:

Joukko $\mathbb{R}$ varustettuna yhteenlaskulla $+$ ja kertolaskulla $\cdot$ on kunta, jos se toteuttaa seuraavat aksioomat. Olkoon seuraavassa $x, y, z \in \mathbb{R}$.

K1: $x+y = y+x$ (yhteenlaskun vaihdantalaki)

K2: $x+(y+z) = (x+y)+z$ (yhteenlaskun liitäntälaki)

K3: On olemassa $0 \in \mathbb{R}$ s.e. $x+0 = x$ (yhteenlaskun neutraalialkion olemassaolo)

K4: Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ on olemassa *vastaluku* $y \in \mathbb{R}$ s.e. $x+y = 0$, merkitään $y = -x$.

K5: $x \cdot y = y \cdot x$ (kertolaskun vaihdantalaki)

K6: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (kertolaskun liitäntälaki)

K7: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ (osittelulaki)

K8: On olemassa $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, s.e. $1 \cdot x = x$ (kertolaskun neutraalialkion olemassaolo)

K9: Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja $x \neq 0$ on olemassa *käänteisluku* $y \in \mathbb{R}$ s.e. $x \cdot y = 1$, merkitään $y = \frac{1}{x}$ tai $y = x^{-1}$.

Järjestysaksioomat:

J1: $\forall x, y$ on täsmälleen yksi seuraavista ehdoista voimassa: $x < y$, $x = y$ tai $y < x$.

J2: Jos $x < y$ ja $y < z$ niin $x < z$

J3: Jos $x < y$ niin $x+z < y+z$ kaikilla $z \in \mathbb{R}$ ja jos $0 < z$ niin $x \cdot z < y \cdot z$.

Täydellisyysaksiooma: Jokaisella ylhäältä rajoitetulla joukolla $A \subset \mathbb{R}$ on $\sup(A) \in \mathbb{R}$.