MAT-10440 Insinöörimatematiikka X 4u / Hirvonen
Tentti 24.9.2013
Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. Tarkastellaan funktiota $f(x, y, z) = 100 - x^2 - yz$.

   (a) Laske funktion hetkellinen muutosnopeus lähdettäessä pisteestä $\left(-1, \frac{1}{2}, 3\right)$ suuntaan $(12, 3, 4)$.

   (b) Mihin suuntaan pisteestä $(1, 2, 3)$ pitäisi lähteä, että funktio vähenisi nopeiten? Mikä olisi tällöin muutosnopeus?

2. (a) Muodosta funktiolle $f(x, y) = \sqrt{1 + x + y^2}$ lineaarinen approksimaatio eli linearisointi pisteen $(4, 2)$ ympäristössä, ja approksimoi sen avulla funktion arvoa pisteessä $\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{2}\right)$.

   (b) Kohdan (a) funktion f lisäksi tarkastellaan funktiota $g(s, t) = \left(\frac{s}{t}, st\right)$. Laske ketjusäännöllä osittaisderivaatta $\frac{\partial}{\partial t} f \circ g$.

3. Funktio $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ kuvaa pisteen (x, y, z) etäisyyttä origosta. Millä etäisyydellä origosta on tason $x + 2y + z = 4$ lähinnä origoa oleva piste?

4. Olkoon V yksikkökuulan $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ se osa, jossa $x \geq 0$, $y \geq 0$ ja $z \geq 0$. Laske pallokoordinaateissa

$$\iiint_V x \, dx dy dz.$$

Insinöörimatematiikka X 4u, kaavakokoelma

1. $z = f(a,b) + \frac{\partial}{\partial x} f(a,b)(x-a) + \frac{\partial}{\partial y} f(a,b)(y-b)$

2. $T(\mathrm{x}) = F(\mathrm{a}) + F'(\mathrm{a})(\mathrm{x}-\mathrm{a})$

3. $F'(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathrm{x}) & D_2 f_1(\mathrm{x}) & \cdots & D_n f_1(\mathrm{x}) \\ D_1 f_2(\mathrm{x}) & D_2 f_2(\mathrm{x}) & \cdots & D_n f_2(\mathrm{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathrm{x}) & D_2 f_m(\mathrm{x}) & \cdots & D_n f_m(\mathrm{x}) \end{bmatrix}$

4. $(F \circ G)'(\mathrm{a}) = F'(G(\mathrm{a}))\, G'(\mathrm{a})$

5. $D_{\mathrm{e}} f(\mathrm{x}) = f'(\mathrm{x})\,\mathrm{e} = \nabla f(\mathrm{x}) \cdot \mathrm{e}$

6. $\nabla f(\mathrm{r}(t)) \cdot \mathrm{r}'(t) = 0$

7. $\begin{cases} g(\mathrm{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathrm{x}) = \lambda \nabla g(\mathrm{x}) \end{cases}, \quad \begin{cases} g(\mathrm{x}) = 0 \\ h(\mathrm{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathrm{x}) = \lambda \nabla g(\mathrm{x}) + \mu \nabla h(\mathrm{x}) \end{cases}$

8. $H_f(\mathrm{x}) = \begin{bmatrix} D_1 D_1 f(\mathrm{x}) & D_1 D_2 f(\mathrm{x}) & \cdots & D_1 D_n f(\mathrm{x}) \\ D_2 D_1 f(\mathrm{x}) & D_2 D_2 f(\mathrm{x}) & \cdots & D_2 D_n f(\mathrm{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(\mathrm{x}) & D_n D_2 f(\mathrm{x}) & \cdots & D_n D_n f(\mathrm{x}) \end{bmatrix}$

9. $\iint_R f(x,y)\, dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, drd\theta$

10. $\iiint_T f(x,y)\, dxdy = \iiint_U f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2 \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta$

11. $\overline{m} = \iiint_T \delta\, dV,\ \overline{z} = \iiint_T z\delta\, dV,\ I_z = \iiint_T (x^2+y^2)\,\delta\, dV$

12. $\iint_A f(x,y)\, dxdy = \iint_S f(F(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| drd\theta$

13. $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right)^{-1}$

14. $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos(2t)), \quad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos(2t))$

15. $\int f'(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)) + C$

$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$