MAT-02650 Algoritmimatematiikka / Hirvonen
Tentti 17.10.2013
Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Huom. Missään tehtävässä pelkkä lopputuloksen ilmoittaminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädyit.

1. Olkoon $A = \{x \in \mathbb{Z} : x = 3n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$.

   (a) Todista, että jos $a \in A$ ja $b \in A$, niin $ab \in A$.

   (b) Esitä seuraava induktiivisesti määritelty joukko ei-induktiivisesti alkioittain.
   $\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \in B$
   Jos $x \in B \cap \mathbb{N}$, niin $-x \in B$.
   Jos $x \in B \cap (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$, niin $x + 3 \in B$.
   Jos $x \in B \cap \mathbb{Q}$, niin $\frac{1}{x} \in B$.
   B ei sisällä muita alkioita.

2. Joukosta A tiedetään, että sen mahtavuus on 3 ja lisäksi pätee

$$\exists x \in A\, \forall y \in A : ((y \neq x) \to p(x, y)).$$

   Anna esimerkki joukosta A kunkin alla esitetyn $p(x, y)$:n tapauksessa. Perusteluna kerro, miten joukon A alkiot (kukin erikseen) toteuttavat yllä annetun ehdon.

   (a) $p(x, y) =$ "$xy = 0$"

   (b) $p(x, y) =$ "$x \neq 0$ ja $x \bmod y = 0$"

   (c) $p(x, y) =$ "$x \cap y \neq \emptyset$"

3. Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $R \subseteq A \times A$, $R = \{\langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle\, \langle 4, 1\rangle\}$.

   (a) Esitä refleksiivinen sulkeuma $r(R)$, symmetrinen sulkeuma $s(R)$ ja transitiivinen sulkeuma $t(R)$.

   (b) Piirrä osittaisesta järjestyksestä $t(R)$ Hassen diagrammi.

   (c) Kun $S = \{\langle 1, 3\rangle, \langle 4, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle\, \langle 3, 4\rangle\}$, onko yhdistetty relaatio $S \circ R$ funktio?

4. Todista alla oleva teoria loogisen päättelyn keinoin ILMAN totuustaulua.

$$((A \wedge \neg B) \to C) \wedge \neg (C \vee B) \to \neg A.$$

Loogisia ekvivalensseja eli tautologioita

Negaatio	Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio
$\neg\neg p = p$	$p \vee \mathtt{t} = \mathtt{t}$	$p \wedge \mathtt{t} = p$	$p \to \mathtt{t} = \mathtt{t}$
	$p \vee \mathtt{e} = p$	$p \wedge \mathtt{e} = \mathtt{e}$	$p \to \mathtt{e} = \neg p$
	$p \vee p = p$	$p \wedge p = p$	$\mathtt{t} \to p = p$
	$p \vee \neg p = \mathtt{t}$	$p \wedge \neg p = \mathtt{e}$	$\mathtt{e} \to p = \mathtt{t}$
			$p \to p = \mathtt{t}$
			$p \to q = \neg p \vee q$
			$p \to q = \neg q \to \neg p$
			$\neg(p \to q) = p \wedge \neg q$

Vaihdantalait	Liitäntälait	Osittelulait
$p \wedge q = q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q = q \vee p$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

De Morganin lait	Absorptio
$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$	$p \wedge (p \vee q) = p$
$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$	$p \vee (p \wedge q) = p$
	$p \wedge (\neg p \vee q) = p \wedge q$
	$p \vee (\neg p \wedge q) = p \vee q$

Inferenssisääntöjä

MP $\dfrac{A,\ A \to B}{\therefore B}$	**MT** $\dfrac{A \to B,\ \neg B}{\therefore \neg A}$	**Conj** $\dfrac{A,\ B}{\therefore A \wedge B}$	**Simp** $\dfrac{A \wedge B}{\therefore A}$
Add $\dfrac{A}{\therefore A \vee B}$	**DS** $\dfrac{A \vee B,\ \neg B}{\therefore A}$	**HS** $\dfrac{A \to B,\ B \to C}{\therefore A \to C}$	

muista rajoitukset

UI $\dfrac{\forall x\, W(x)}{\therefore W(t)}$	**UG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \forall x\, W(x)}$	**EG** $\dfrac{W(t)}{\therefore \exists x\, W(x)}$	**EI** $\dfrac{\exists x\, W(x)}{\therefore W(t)}$

Ekvivalensseja

$\neg\forall x\, W(x) = \exists x\, \neg W(x)$	$\neg\exists x\, W(x) = \forall x\, \neg W(x)$
$\exists x\, (A(x) \vee B(x)) = \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x)$	$\forall x\, (A(x) \wedge B(x)) = \forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x)$
$\exists x\, (A(x) \to B(x)) = \forall x\, A(x) \to \exists x\, B(x)$	$\forall x\, \forall y\, W(x,y) = \forall y\, \forall x\, W(x,y)$
$\exists x\, \exists y\, W(x,y) = \exists y\, \exists x\, W(x,y)$	

$\forall x\, (C \vee A(x)) = C \vee \forall x\, A(x)$	$\forall x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \forall x\, A(x)$
$\exists x\, (C \vee A(x)) = C \vee \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (C \wedge A(x)) = C \wedge \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (C \to A(x)) = C \to \forall x\, A(x)$	$\exists x\, (C \to A(x)) = C \to \exists x\, A(x)$
$\forall x\, (A(x) \to C) = \exists x\, A(x) \to C$	$\exists x\, (A(x) \to C) = \forall x\, A(x) \to C$

Implikaatioita

$\forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	$\exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
$\forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	$\forall x\, (A(x) \to B(x)) \Rightarrow \forall x\, A(x) \to \forall x\, B(x)$
$\exists y\, \forall x\, W(x,y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, W(x,y)$	