MAT-10440 Insinöörimatematiikka X 4u / Hirvonen
Tentti 22.10.2013

Ei laskimia tai kirjallista materiaalia. Kaavakokoelma kääntöpuolella.

Missään tehtävässä pelkän lopputuloksen esittäminen ei riitä, vaan vastauspaperin tulee sisältää päättely, jolla lopputulokseen päädytään.

1. Tarkastellaan käyrää C, jonka parametrisointi on $\mathbf{r}(t) = (e^{2t}, e^{-t})$, $t \in [0, \ln 2]$.

   (a) Esitä käyrä C muodossa $y = f(x)$, $x \in [x_1, x_2]$.

   (b) Jos $\mathbf{r}(t)$ kuvaa massapisteen paikkaa hetkellä t, mitkä ovat massapisteen kiihtyvyyden suunta ja suuruus hetkellä käyrän pisteessä $(1, 1)$?

   (c) Onko käyrällä C missään pisteessä vaakasuoraa tangenttia? Jos on, missä?

2. (a) Laske funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = \left(x^2 \cos y, \frac{y}{x}\right)$ derivaatta pisteessä $(3, 0)$.

   (b) Todista, että <u>ei ole olemassa</u> raja-arvoa $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(1-x)(1-y)}{1-xy}$.

3. Etsi funktion $f(x, y) = 2x - x^2 + 2y^2 - y^4$ suurin ja pienin arvo neliössä, jossa $-2 \leq x \leq 2$ ja $-2 \leq y \leq 2$.

4. Alla olevan integraalien summan voi esittää järjestyksessä $dxdy$ yhtenä integraalina. Esitä ja laske integraalin arvo vaihdetussa järjestyksessä.

$$\int_{-2}^{1} \int_{-x}^{2} (3x + 2y)\, dydx + \int_{1}^{4} \int_{x-2}^{2} (3x + 2y)\, dydx$$

Vihje: Kuvan piirtäminen alueesta helpottanee järjestyksen vaihtoa.

Insinöörimatematiikka X 4u, kaavakokoelma

1. $z = f(a,b) + \frac{\partial}{\partial x} f(a,b)(x-a) + \frac{\partial}{\partial y} f(a,b)(y-b)$

2. $T(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a}) + F'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})$

3. $F'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{x}) & D_2 f_m(\mathbf{x}) & \cdots & D_n f_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$

4. $(F \circ G)'(\mathbf{a}) = F'(G(\mathbf{a}))\, G'(\mathbf{a})$

5. $D_{\mathbf{e}} f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})\,\mathbf{e} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}$

6. $\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$

7. $\begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) \end{cases}, \quad \begin{cases} g(\mathbf{x}) = 0 \\ h(\mathbf{x}) = 0 \\ \nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}) + \mu \nabla h(\mathbf{x}) \end{cases}$

8. $H_f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} D_1 D_1 f(\mathbf{x}) & D_1 D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_1 D_n f(\mathbf{x}) \\ D_2 D_1 f(\mathbf{x}) & D_2 D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_2 D_n f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_n D_1 f(\mathbf{x}) & D_n D_2 f(\mathbf{x}) & \cdots & D_n D_n f(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$

9. $\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, drd\theta$

10. $\iiint_T f(x,y)\,dxdy = \iiint_U f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2 \sin\phi\, d\rho d\phi d\theta$

11. $\overline{m} = \iiint_T \delta\, dV$, $\overline{z} = \iiint_T z\delta\, dV$, $I_z = \iiint_T (x^2+y^2)\,\delta\, dV$

12. $\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_S f(F(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| drd\theta$

13. $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right)^{-1}$

14. $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos(2t))$, $\quad \cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos(2t))$

15. $\int f'(g(x))\, g'(x)\, dx = f(g(x)) + C$

$\int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$