

**MAT-60100 Kompleksimuuttujan funktiot**  
**2. Välikoe 5.12. 2013 klo 12-14.**

**Ei muistiinpanoja, laskimia, taulukoita. Kirjoita koepaperiin nimesi, opiskelijanumerosi ja koulutusohjelmasi. Vastaukset perusteltava.**

1. Tarkastellaan potenssisarjaa  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ .
- a) Määrittele yo. potenssisarjan suppenemissäde.
  - b) Osoita, että jos yo. potenssisarja suppenee pisteessä  $z = z_1 \neq 0$ , niin se suppenee kun  $|z| < z_1$ .

2. Etsi funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$$

Laurentin sarja joka suppenee, kun  $0 < |z| < 1$  (ts. origon ympäristössä). Osoita saamastasi Laurentin sarjasta mikä on pisteessä  $z=0$  olevan navan kertaluku.

3. Laske tehtävän 2 funktion integraali pitkin sulkeutuvaa, yksinkertaista ja sileätä integroimistietä, jonka sisään jää
- a) piste  $z=0$  ja  $z=-1$
  - b) piste  $z=0$  mutta ei pistettä  $z=-1$
  - c) piste  $z=-1$  mutta ei pistettä  $z=0$
  - d) kumpikaan pisteistä  $z=0$  tai  $z=-1$  ei ole integroimistien sisällä.
4. Ratkaise alkuarvoprobleema

$$y''(t) - y(t) = e^{2t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad t \geq 0$$

Laplace-muunnoksen avulla. Vastauksena halutaan funktio  $y(t)$ .